Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **4** Hal. 73 – 82
ISSN : 2303–291X

OPERATOR BATAS PADA HOMOLOGI KUBIK

SULASTRI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
lathifah.sulastri@yahoo.com

Abstrak. Algebra topology is a concept that classifies topological spaces particularly cubical sets based on the context of the algebraic objects namely homology groups. A topological problem can also be viewed from the point of view of combinatorics which can be simplified to be graphs. In this paper it is discussed about the classification of the cubical sets based on its homology groups using the concept of boundary operators as homomorphisms of free Abelian groups.

Kata Kunci: Topological spaces, homology groups, the boundary operators, free Abelian groups

1. Pendahuluan

Dua ruang vektor yang berdimensi sama dan berhingga adalah isomorfik. Hal ini berarti bahwa himpunan ruang vektor tersebut dapat diklasifikasikan berdasarkan dimensinya yang merupakan suatu bilangan asli yang tunggal. Aljabar topologi merupakan suatu konsep yang membahas pengklasifikasian yang sama, tetapi dalam konteks ruang topologi yang didasarkan pada objek-objek aljabar yaitu grup homologi.

Salah satu konsep yang diperlukan untuk mengkaji homologi dari suatu ruang topologi adalah operator batas sebagai suatu homomorfisma dari grup Abelian bebas. Grup Abelian bebas adalah suatu grup Abelian yang mempunyai basis berupa himpunan fungsi dari himpunan kubus-kubus dasar ke bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

Suatu masalah topologi juga dapat ditinjau dari sudut pandang kombinatorik, yang dapat disederhanakan menjadi suatu graf. Makalah ini akan membahas homologi kubik yang dapat direpresentasikan sebagai suatu himpunan kubik.

2. Rantai-Rantai Kubik

Setiap kubus dasar $k, Q \in \mathcal{K}_k^d$ mempunyai objek aljabar $\widehat{Q}$ yang disebut rantai dasar k dari $\mathbb{R}^d$. Himpunan dari semua rantai-rantai dasar k dari $\mathbb{R}^d$ dinotasikan sebagai

$$\widehat{\mathcal{K}}_k^d = \{\widehat{Q} | Q \in \mathcal{K}_k^d, \}$$

dan himpunan dari semua rantai-rantai dasar dari $\mathbb{R}^d$ dnotasikan sebagai

$$\widehat{\mathcal{K}}^d = \bigcup_{k=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{K}}_k^d.$$

Diberikan sebarang koleksi hingga $\{\widehat{Q}_1, \widehat{Q}_2, \cdots, \widehat{Q}_m\} \subset \mathcal{K}_k^d$ dari rantai-rantai dasar dimensi k, sedemikian sehingga diperoleh penjumlahannya dalam bentuk

$$c = \alpha_1 \widehat{Q}_1 + \alpha_2 \widehat{Q}_2 + \cdots + \alpha_m \widehat{Q}_m,$$

dimana α_i adalah sebarang bilangan bulat. Jika semua $\alpha_i = 0, i = 1, 2, \cdots, m$, maka diperoleh $c = 0$. Penjumlahan rantai-rantai dasar k didefinisikan oleh:

$$\sum \alpha_i \widehat{Q_i} + \sum \beta_i \widehat{Q_i} = \sum (\alpha_i + \beta_i) \widehat{Q_i}.$$

C_k^d merupakan koleksi dari rantai-rantai kubik c adalah grup Abelian yang mempunyai basis $\widehat{\mathcal{K}}_k^d$. Setiap kubus dasar yang digunakan untuk menghasilkan elemen basis disebut **rantai dasar**.

Secara khusus, untuk setiap $Q \in \mathcal{K}_k^d$, didefinisikan $\widehat{Q} : \mathcal{K}_k^d \to \mathbb{Z}$ oleh

$$\widehat{Q}(P) = \begin{cases} 1, & \text{jika } P = Q, \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

Definisi 2.1. *Grup C_k^d dari rantai-rantai dimensi k dari $\mathbb{R}^d$ (disingkat rantai-rantai kubik k) adalah grup Abelian bebas yang dihasilkan oleh rantai-rantai dasar dari $\mathcal{K}_k^d$. Jadi, elemen-elemen dari C_k^d adalah fungsi-fungsi $c : \mathcal{K}_k^d \to \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $c(Q) = 0$ untuk semua Q kecuali untuk sejumlah berhingga $Q \in \mathcal{K}_k^d$. Secara khusus, $\widehat{\mathcal{K}}_k^d$ adalah basis untuk C_k^d.*

Diberikan suatu kubus dasar Q, maka rantai dasarnya adalah $\widehat{Q}$. Dengan cara yang sama, diberikan suatu rantai dasar $\widehat{Q}$, maka Q sebagai kubus dasarnya.

Proposisi 2.2. *Fungsi $\phi : \mathcal{K}_k^d \to \widehat{\mathcal{K}}_k^d$ yang diberikan oleh $\phi(Q) = \widehat{Q}$ adalah suatu fungsi bijeksi.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa ϕ adalah fungsi pada (*surjektif*) dan fungsi satu-satu (*injektif*). Karena untuk setiap $\widehat{Q} \in \widehat{\mathcal{K}}_k$ terdapat $Q \in \mathcal{K}_k$ sehingga $\phi(Q) = \widehat{Q}$, maka ϕ surjektif. Selanjutnya misalkan $P, Q \in \mathcal{K}_k$ dan $\widehat{P} = \widehat{Q}$. Apabila $1 = \widehat{P}(P) = \widehat{Q}(P)$, diperoleh $P = Q$. Sehingga diperoleh bahwa ϕ adalah fungsi injektif. □

Definisi 2.3. *Misal $c \in C_k^d$. Support dari rantai kubik c yang dinotasikan oleh $|c|$ adalah himpunan kubik yang pemetaannya tidak nol, didefinisikan sebagai*

$$|c| = \bigcup \{Q \in \mathcal{K}_k^d \mid c(Q) \neq 0\}.$$

Definisi 2.4. *Misalkan $c_1, c_2 \in C_k^d$, dimana $c_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{Q}_i$ dan $c_2 = \sum_{i=1}^m \beta_i \widehat{Q}_i$. Hasil kali skalar dari rantai kubik c_1 dan c_2 didefinisikan sebagai*

$$\langle c_1, c_2 \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i.$$

Definisi 2.5. *Diberikan dua kubus dasar $P \in \mathcal{K}_k^d$ dan $Q \in \mathcal{K}_{k'}^{d'}$. Didefinisikan*

$$\widehat{P} \diamond \widehat{Q} = \widehat{P \times Q}.$$

Definisi ini diperluas untuk sebarang rantai-rantai kubik $c_1 \in C^d_k$ *dan* $c_2 \in C^{d'}_{k'}$ *oleh*

$$c_1 \diamond c_2 = \sum_{P \in \mathcal{K}_k, Q \in \mathcal{K}_{k'}} \langle c_1, \widehat{P} \rangle \langle c_2, \widehat{Q} \rangle \widehat{P \times Q}.$$

Rantai kubik $c_1 \diamond c_2 \in C^{d+d'}_{k+k'}$ *disebut hasil kali kubik dari* c_1 *dan* c_2.

Contoh 2.6. Misal $P_1 = [0] \times [0,1]$, $P_2 = [1] \times [0,1]$, dan $Q_1 = [-1,0]$, $Q_2 = [0,1]$. Perhatikan bahwa $\widehat{P}_i \in \widehat{\mathcal{K}}^2_1$ dan $\widehat{Q}_i \in \widehat{\mathcal{K}}^1_1$. Diberikan rantai-rantai kubik $c_1 = \widehat{P}_1 + \widehat{P}_2$ dan $c_2 = \widehat{Q}_1 + \widehat{Q}_2$, dari definisi hasil kali kubik diperoleh

$$\begin{aligned}
c_1 \diamond c_2 &= \sum_{P \in \mathcal{K}^2_1, Q \in \mathcal{K}^1_1} \langle c_1, \widehat{P} \rangle \langle c_2, \widehat{Q} \rangle \widehat{P \times Q} \\
&= \widehat{P_1 \times Q_1} + \widehat{P_2 \times Q_1} + \widehat{P_1 \times Q_2} + \widehat{P_2 \times Q_2}, \text{ dan} \\
c_2 \diamond c_1 &= \sum_{Q \in \mathcal{K}^1_1, P \in \mathcal{K}^2_1} \langle c_2, \widehat{Q} \rangle \langle c_1, \widehat{P} \rangle \widehat{Q \times P} \\
&= \widehat{Q_1 \times P_1} + \widehat{Q_1 \times P_2} + \widehat{Q_2 \times P_1} + \widehat{Q_2 \times P_2}.
\end{aligned}$$

Hasil kali kubik mempunyai sifat-sifat berikut.

Proposisi 2.7. *Misal* c_1, c_2, c_3 *adalah sebarang rantai-rantai kubik, maka*

(i) $c_1 \diamond 0 = 0 \diamond c_1 = 0$.
(ii) $c_1 \diamond (c_2 + c_3) = (c_1 \diamond c_2) + (c_1 \diamond c_3)$, *dimana* c_1, c_2, *dan* $c_3 \in C^d_k$.
(iii) $(c_1 \diamond c_2) \diamond c_3 = c_1 \diamond (c_2 \diamond c_3)$.
(iv) Jika $c_1 \diamond c_2 = 0$, *maka* $c_1 = 0$ *atau* $c_2 = 0$.

Bukti.

(i) Misal $c_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{P}_i$ maka $c_1 \diamond 0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{P_i \times 0} = \widehat{0 \times P_i} \sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$.
(ii) Misal $c_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{P}_i$, $c_2 = \sum_{j=1}^n \beta_j \widehat{Q}_j$ dan $c_3 = \sum_{k=1}^o \gamma_k \widehat{R}_k$ maka

$$\begin{aligned}
c_1 \diamond (c_2 + c_3) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{P}_i \diamond (\sum_{j=1}^n \beta_j \widehat{Q}_j + \sum_{k=1}^o \gamma_k \widehat{R}_k) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (\sum_{j=1}^n \beta_j + \sum_{k=1}^o \gamma_k) P_i \times \widehat{(Q_j + R_k)} \\
&= (\sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^n \beta_j + \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^o \gamma_k) \widehat{P_i \times Q_j} + \widehat{P_i \times R_k} \\
&= \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^n \beta_j \widehat{P_i \times Q_j} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^o \gamma_k \widehat{P_i \times R_k} \\
&= \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{P}_i \diamond \sum_{j=1}^n \beta_j \widehat{Q}_j + \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{P}_i \diamond \sum_{k=1}^o \gamma_k \widehat{R}_k = (c_1 \diamond c_2) + (c_1 \diamond c_3).
\end{aligned}$$

(iii) Misal $c_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{P}_i$, $c_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{Q}_j$ dan $c_3 = \sum_{k=1}^{o} \gamma_k \widehat{R}_k$ maka

$$\begin{aligned}(c_1 \diamond c_2) \diamond c_3 &= (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{P}_i \diamond \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{Q}_j) \diamond \sum_{k=1}^{o} \gamma_k \widehat{R}_k = (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{P_i \times Q_j}) \diamond \sum_{k=1}^{o} \gamma_k \widehat{R}_k \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{k=1}^{o} \gamma_k \widehat{P_i \times Q_j \times R_k} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{P}_i \diamond (\sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{k=1}^{o} \gamma_k \widehat{Q_j \times R_k}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{P}_i \diamond (\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{Q}_j \diamond \sum_{k=1}^{o} \gamma_k \widehat{R}_k) = c_1 \diamond (c_2 \diamond c_3).\end{aligned}$$

(iv) Asumsikan bahwa $c_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{P}_i$ dan $c_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{Q}_j$. Maka

$$0 = c_1 \diamond c_2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{P}_i \diamond \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{Q}_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \widehat{P}_i \diamond \widehat{Q}_j,$$

sehingga $\alpha_i \beta_j = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, m$, dan $j = 1, 2, \cdots, n$. Sesuai dari pernyataan di atas maka

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i \beta_j)^2 = (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2)(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2),$$

karenanya $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 = 0$ atau $\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 = 0$. Akibatnya, $c_1 = 0$ atau $c_2 = 0$. $\square$

Proposisi 2.8. *Misal $\widehat{Q}$ suatu rantai dasar dari $\mathbb{R}^d$ dengan $d > 1$, sehingga terdapat tunggal rantai-rantai dasar $\widehat{I}$ dan $\widehat{P}$ dengan emb I = 1 dan emb $P = d-1$ sedemikian sehingga $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}$.*

Bukti. Karena $\widehat{Q}$ adalah rantai dasar, maka Q adalah kubus dasar, yaitu

$$Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d.$$

Tetapkan $I = I_1$ dan $P = I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_d$, maka $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}$.

Selanjutnya dibuktikan bahwa $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}$ adalah dekomposisi tunggal. Jika $\widehat{Q} = \widehat{J} \diamond \widehat{P'}$ untuk suatu $J \in \mathcal{K}^1$ dan $P' \in \mathcal{K}^{d-1}$, maka $\widehat{I_1 \times P} = \widehat{J \times P'}$ dan diperoleh $I_1 \times P = J \times P'$. Karena $I_1, J \subset \mathbb{R}$, maka $I_1 = J$ dan $P = P'$. $\square$

3. Rantai-Rantai Kubik dalam Himpunan Kubik

Definisi 3.1. *Misal $X \subset \mathbb{R}^d$ himpunan kubik dan $\widehat{\mathcal{K}}_k(X) = \{\widehat{Q} | Q \in \mathcal{K}_k(X)\}$. $C_k(X)$ yang didefinisikan sebagai $\{c \in C_k^d |\ |c| \subset X\}$ adalah subgrup dari C_k^d yang dibangun oleh elemen-elemen dari $\widehat{\mathcal{K}}_k(X)$ dan merupakan himpunan rantai-rantai kubik k dari X.*

Dari Definisi 3.1 diperoleh bahwa $\widehat{\mathcal{K}}_k(X)$ merupakan basis dari $C_k(X)$. Selain itu, untuk sebarang himpunan kubik X, keluarga $\mathcal{K}_k(X)$ adalah berhingga, $C_k(X)$ adalah grup Abelian bebas dimensi berhingga.

4. Pembahasan

Definisi 4.1. *Diberikan $k \in \mathbb{Z}$, operator batas kubik yang dinotasikan oleh*

$$\partial_k : C_k^d \to C_{k-1}^d$$

adalah homomorfisma dari grup-grup Abelian bebas yang didefinisikan untuk suatu rantai dasar $\widehat{Q} \in \widehat{\mathcal{K}}_k^d$ dengan bilangan embedding dari Q yang bersesuaian.

Untuk kasus $d = 1$, maka Q adalah interval dasar sehingga $Q = [l] \in \mathcal{K}_0^1$ atau $Q = [l, l+1] \in \mathcal{K}_1^1$ untuk suatu $l \in \mathbb{Z}$. Definisikan $\partial_k \widehat{Q} = 0$ jika $Q = [l]$, dan $\partial_k \widehat{Q} = \widehat{[l+1]} - \widehat{[l]}$ jika $Q = [l, l+1]$.

Untuk kasus $d > 1$, misal $I = I_1(Q)$ dan $P = I_2(Q) \times \cdots \times I_d(Q)$. Maka dari Proposisi 2.8 diperoleh $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}$. Definisikan

$$\partial_k \widehat{Q} = \partial_{k_1} \widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial_{k_2} \widehat{P}.$$

dimana $k_1 = \dim I$ dan $k_2 = \dim P$. Definisi ini diperluas ke semua rantai-rantai kubik dengan sifat linier yaitu jika $c = \alpha_1 \widehat{Q}_1 + \alpha_2 \widehat{Q}_2 + \cdots + \alpha_m \widehat{Q}_m$, maka

$$\partial_k c = \alpha_1 \partial_k \widehat{Q}_1 + \alpha_2 \partial_k \widehat{Q}_2 + \cdots + \alpha_m \partial_k \widehat{Q}_m.$$

Untuk lebih memahami konsep operator batas, maka diberikan contoh-contoh berikut.

Contoh 4.2. Misal $Q = [l] \times [k]$, maka

$$\partial_0 \widehat{Q} = \partial_0 \widehat{[l]} \diamond \widehat{[k]} + (-1)^{\dim\ \widehat{[l]}} \widehat{[l]} \diamond \partial_0 \widehat{[k]} = 0 \diamond \widehat{[k]} + \widehat{[l]} \diamond 0 = 0 + 0.$$

Contoh 4.3. Misal $Q = [l, l+1] \times [k, k+1]$, (lihat Gambar 4.1). Maka

$$\begin{aligned}
\partial_2 \widehat{Q} &= \partial_1 \widehat{[l, l+1]} \diamond \widehat{[k, k+1]} + (-1)^{\dim\ \widehat{[l,l+1]}} \widehat{[l, l+1]} \diamond \partial_1 \widehat{[k, k+1]} \\
&= (\widehat{[l+1]} - \widehat{[l]}) \diamond \widehat{[k, k+1]} - \widehat{[l, l+1]} \diamond (\widehat{[k+1]} - \widehat{[k]}) \\
&= \widehat{[l+1]} \diamond \widehat{[k, k+1]} - \widehat{[l]} \diamond \widehat{[k, k+1]} - \widehat{[l, l+1]} \diamond \widehat{[k+1]} + \widehat{[l, l+1]} \diamond \widehat{[k]} \\
&= \widehat{[l+1] \times [k, k+1]} - \widehat{[l] \times [k, k+1]} + \widehat{[l, l+1] \times [k]} - \widehat{[l, l+1] \times [k+1]} \\
&= \widehat{B}_1 - \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 - \widehat{B}_2,
\end{aligned}$$

dimana

$$A_1 = [l] \times [k, k+1], B_1 = [l+1] \times [k, k+1], A_2 = [l, l+1] \times [k], \text{ dan } B_2 = [l, l+1] \times [k+1].$$

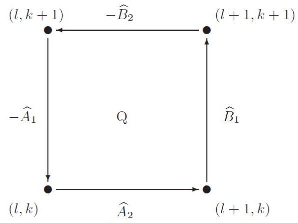
Untuk arah dari rantai-rantai kubik, tanda positif berlawanan arah jarum jam dan tanda negatif searah jarum jam. Untuk menyederhanakan penulisan maka disederhanakan notasi ∂_k ke ∂, karena subscript k hanya menunjukkan dimensi dari rantai kubiknya.

Proposisi 4.4. *Misal c dan c' adalah rantai-rantai kubik, maka*

$$\partial(c \diamond c') = \partial c \diamond c' + (-1)^{\dim\ c} c \diamond \partial c'.$$

Bukti. Karena c dan c' adalah rantai-rantai kubik, maka asumsikan untuk sebarang $Q, Q' \in \mathcal{K}$. Dari definisi operator batas diperoleh

$$\partial(\widehat{Q} \diamond \widehat{Q'}) = \partial \widehat{Q} \diamond \widehat{Q'} + (-1)^{dim\ Q} \widehat{Q} \diamond \partial \widehat{Q'}. \tag{4.1}$$



Gambar 4.1. Batas dari $[l, l+1] \times [k, k+1]$

Misal $c = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{Q_i}$ dan $c' = \sum_{j=1}^{m'} \alpha'_j \widehat{Q'_j}$. Perhatikan bahwa dim c = dim $\widehat{Q}_i$, sehingga

$$\begin{aligned}
\partial(c \diamond c') &= \partial(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \widehat{Q_i} \diamond \sum_{j=1}^{m'} \alpha'_j \widehat{Q'_j}) = \partial(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m'} \alpha_i \alpha'_j \widehat{Q_i} \diamond \widehat{Q'_j}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m'} \alpha_i \alpha'_j \partial(\widehat{Q_i} \diamond \widehat{Q'_j}) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m'} \alpha_i \alpha'_j (\partial\widehat{Q_i} \diamond \widehat{Q'_j} + (-1)^{dim\ \widehat{Q}_i} \widehat{Q_i} \diamond \partial\widehat{Q'_j}) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m'} \alpha_i \alpha'_j (\partial\widehat{Q_i} \diamond \widehat{Q'_j} + (-1)^{dim\ c} \widehat{Q_i} \diamond \partial\widehat{Q'_j}) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m'} \alpha_i \partial\widehat{Q_i} \diamond \alpha'_j \widehat{Q'_j} + (-1)^{dim\ c} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m'} \alpha_i \widehat{Q_i} \diamond \alpha'_j \partial\widehat{Q'_j} \\
&= \partial c \diamond c' + (-1)^{dim\ c} c \diamond \partial c'.
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibuktikan persamaan (4.1) berlaku dengan induksi pada $d =$ emb Q.

Jika $d = 1$, maka diperoleh $\partial(\widehat{Q} \diamond \widehat{Q'}) = \partial\widehat{Q} \diamond \widehat{Q'} + (-1)^{dim\ \widehat{Q}} \widehat{Q} \diamond \partial\widehat{Q'}$, sehingga hasilnya langsung sesuai dari Definisi 4.1.

Jika $d > 1$, maka didekomposisikan Q pada Proposisi 2.8, yakni $Q = I \times P$, dimana emb $I = 1$ dan emb $P = d - 1$. Maka dari definisi operator batas,

$$\begin{aligned}
\partial(\widehat{Q} \diamond \widehat{Q'}) &= \partial(\widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \widehat{Q'}) = \partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \widehat{Q'} + (-1)^{dim\ \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial(\widehat{P} \diamond \widehat{Q'}) \\
&= \partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \widehat{Q'} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond (\partial\widehat{P} \diamond \widehat{Q'} + (-1)^{\dim \widehat{P}} \widehat{P} \diamond \partial\widehat{Q'}) \\
&= \partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \widehat{Q'} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial\widehat{P} \diamond \widehat{Q'} + (-1)^{\dim \widehat{I} + dim\ \widehat{P}} \widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \partial\widehat{Q'} \\
&= (\partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial\widehat{P}) \diamond \widehat{Q'} + (-1)^{dim\ \widehat{Q}} \widehat{Q} \diamond \partial\widehat{Q'} \\
&= \partial\widehat{Q} \diamond \widehat{Q'} + (-1)^{\dim \widehat{Q}} \widehat{Q} \diamond \partial\widehat{Q'},
\end{aligned}$$

dimana persamaan terakhir sesuai dengan definisi dari operator batas. $\square$

Teorema 4.5. *Misal ∂ suatu operator batas, maka*

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Bukti. Misal Q adalah interval dasar. Jika $Q = [l]$, maka dari definisi $\partial\widehat{Q} = 0$ sehingga $\partial(\partial\widehat{Q}) = 0$. Jika $Q = [l, l+1]$, maka

$$\partial(\partial\widehat{Q}) = \partial(\partial[\widehat{l, l+1}]) = \partial([\widehat{l+1}] - [\widehat{l}]) = \partial[\widehat{l+1}] - \partial[\widehat{l}] = 0 - 0 = 0.$$

Selanjutnya asumsikan bahwa $Q \in \mathcal{K}^d$ untuk $d > 1$. Maka $Q = I \times P$, dimana $I = I_1(Q)$ dan $P = I_2(Q) \times \cdots \times I_d(Q)$, sehingga dari Proposisi 2.8,

$$\begin{aligned}
\partial(\partial\widehat{Q}) &= \partial(\partial(\widehat{I \times P})) = \partial(\partial(\widehat{I} \diamond \widehat{P})) = \partial(\partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}}\widehat{I} \diamond \partial\widehat{P}) \\
&= \partial(\partial\widehat{I} \diamond \widehat{P}) + (-1)^{\dim \widehat{I}}\partial(\widehat{I} \diamond \partial\widehat{P}) \\
&= \partial\partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim \partial\widehat{I}}\partial\widehat{I} \diamond \partial\widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}}\partial(\widehat{I} \diamond \partial\widehat{P}) \\
&= (-1)^{\dim \partial\widehat{I}}\partial\widehat{I} \diamond \partial\widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}}(\partial\widehat{I} \diamond \partial\widehat{P} + (-1)^{\dim\ \widehat{I}}\widehat{I} \diamond \partial\partial\widehat{P}) \\
&= (-1)^{\dim\ \partial\widehat{I}}\partial\widehat{I} \diamond \partial\widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}}\partial\widehat{I} \diamond \partial\widehat{P}.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa jika $\dim \widehat{I} = 0$, maka $\partial\widehat{I} = 0$, sehingga setiap bagian pada penjumlahannya adalah 0 dan karenanya $\partial\partial\widehat{Q}$= 0. Di bagian lain, jika $\dim \widehat{I} = 1$, maka $\dim \partial\widehat{I} = 0$ dan karenanya dua bagian saling menghilangkan, sehingga diperoleh $\partial\partial\widehat{Q}$= 0. □

Definisi 4.6. *Operator batas untuk himpunan kubik X didefinisikan oleh*

$$\partial_k^X : C_k(X) \to C_{k-1}(X),$$

diberikan dengan pembatasan $\partial_k : C_k^d \to C_{k-1}^d$ pada $C_k(X)$, dimana

$$\partial_k^X(c) = \partial_k(c).$$

Hal yang terpenting dari makalah ini adalah homologi kubik, namun sebelumnya diberikan definisi berikut. Misal $X \subset \mathbb{R}^d$ adalah himpunan kubik. Suatu rantai kubik k yaitu $z \in C_k(X)$ disebut **siklik** (*cycle*) pada X jika $\partial z = 0$. Maka, himpunan dari semua siklik k di X, yang dinotasikan oleh $Z_k(X)$ adalah ker ∂_k^X dan merupakan subgrup dari $C_k(X)$, sehingga dapat disimpulkan sesuai dengan himpunan relasi-relasi berikut.

$$Z_k(X) = ker\ \partial_k^X = C_k(X) \cap ker\ \partial_k \subset C_k(X).$$

Suatu rantai k yaitu $z \in C_k(X)$ disebut **batas** (*boundary*) di X jika terdapat $c \in C_{k+1}(X)$ sedemikian sehingga $\partial c = z$. Maka himpunan dari anggota-anggota batas di $C_k(X)$ yang dinotasikan oleh $B_k(X)$, terdiri dari peta $\partial_{k+1}^X(C_{k+1} \to C_k)$. Karena ∂_{k+1}^X adalah homomorfisma, $B_k(X)$ adalah subgrup dari $C_k(X)$, sehingga bisa disimpulkan bahwa

$$B_k(X) = im\ \partial_{k+1}^X = \partial_{k+1}(C_{k+1}(X)) \subset C_k(X).$$

Dari Teorema 4.5, diperoleh bahwa jika $\partial c = z$ maka $\partial z = \partial^2 z = 0$, sehingga setiap batas adalah siklik dan $B_k(X)$ adalah subgrup dari $Z_k(X)$.

Misal $z_1, z_2 \in Z_k(X)$ dikatakan *homologous* yang dinotasikan oleh $z_1 \sim z_2$ jika $z_1 - z_2$ adalah batas dari X sehingga $z_1 - z_2 \in B_k(X)$. Kelas-kelas ekivalennya adalah elemen-elemen dari grup kuosien $Z_k(X)/B_k(X)$.

Definisi 4.7. *Grup homologi kubik k, atau lebih singkatnya grup homologi k, dari X adalah grup kuosien yang didefinisikan oleh :*

$$H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X).$$

Homologi dari X adalah koleksi dari semua grup homologi k dari X yang dinotasikan oleh

$$H_*(X) = \{H_k(X)\}_{k\in\mathbf{Z}}.$$

Definisi 4.8. *Diberikan $z \in Z_k(X)$, $[z]_X \in H_k(X)$ adalah kelas homologi z pada X.*

Diberikan contoh berikut untuk menentukan homologi kubiknya.

Contoh 4.9. Misal himpunan kubik $\Gamma^1 = [0] \times [0,1] \cup [1] \times [0,1] \cup [0,1] \times [0] \cup [0,1] \times [1]$. Himpunan-himpunan dari kubus dasar adalah

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0(\Gamma^1) &= \{[0] \times [0], [0] \times [1], [1] \times [0], [1] \times [1]\}\\ \mathcal{K}_1(\Gamma^1) &= \{[0] \times [0,1], [1] \times [0,1], [0,1] \times [0], [0,1] \times [1]\}.\end{aligned}$$

Jadi, basis untuk himpunan-himpunan rantainya adalah

$$\widehat{\mathcal{K}}_0(\Gamma^1) = \{\widehat{[0] \times [0]}, \widehat{[0] \times [1]}, \widehat{[1] \times [0]}, \widehat{[1] \times [1]}\} = \{\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]}, \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]}, \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}, \widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]}\},$$
$$\widehat{\mathcal{K}}_1(\Gamma^1) = \{\widehat{[0] \times [0,1]}, \widehat{[1] \times [0,1]}, \widehat{[0,1] \times [0]}, \widehat{[0,1] \times [1]}\} = \{\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]}, \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0,1]}, \widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[0]}, \widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[1]}\}.$$

Untuk menghitung operator batasnya, akan ditentukan batas dari elemen-elemen basisnya.

$$\begin{aligned}\partial(\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]}) &= -\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]}.\\ \partial(\widehat{[1]} \diamond \widehat{[0,1]}) &= -\widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]}.\\ \partial(\widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[0]}) &= -\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}.\\ \partial(\widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[1]}) &= -\widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} + \widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]}.\end{aligned}$$

sehingga basisnya bisa ditulis dalam bentuk matrik

$$\partial_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan $Z_1(\Gamma^1)$, akan ditentukan $\ker \partial_1$ dengan menyelesaikan persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_4 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

yang memberikan $\alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha_3 = \alpha_4$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa $Z_1(\Gamma^1) = \{\alpha[1,-1,-1,1]^T | \alpha \in \mathbb{Z}\}$, dengan $Z_1(\Gamma^1)$ dihasilkan oleh $\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]} - \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0,1]} - \widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[1]}$. Ketika $C_2(\Gamma^1) = 0$, $B_1(\Gamma^1) = 0$ dan oleh karena itu $H_1(\Gamma^1) = Z_1(\Gamma^1) \cong \mathbb{Z}$. Lalu dihitung $H_0(\Gamma^1)$. Perhatikan bahwa tidak ada solusi untuk persamaan

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

karena determinan dari matrik yang berisi basis dari rantai-rantai kubiknya = 0. Ini berimplikasi bahwa $\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} \notin B_0(\Gamma^1)$. Dengan cara yang lain,

$$\begin{aligned} \partial(\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]}) &= -\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]}. \\ \partial(\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]} + \widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[1]}) &= -\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]}. \\ \partial(\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]} + \widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[1]} - \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0,1]}) &= -\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]} \end{aligned}$$

Jadi, $\{\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} - \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]}, \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} - \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}, \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} - \widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]}\} \subset B_0(\Gamma^1)$. Khususnya, semua rantai-rantai dasar bersifat homolog, sehingga $\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} \sim \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} \sim \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]} \sim \widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]}$.

Selanjutnya, misal sebarang rantai $z \in C_0(\Gamma^1)$. Maka

$$z = \alpha_1 \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \alpha_2 \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} + \alpha_3 \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]} + \alpha_4 \widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]},$$

sehingga pada tingkat homologi

$$\begin{aligned} [z]_{\Gamma^1} &= \left[\alpha_1 \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \alpha_2 \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} + \alpha_3 \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]} + \alpha_4 \widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]} \right]_{\Gamma^1} \\ &= \alpha_1 \left[\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} \right]_{\Gamma^1} + \alpha_2 \left[\widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} \right]_{\Gamma^1} + \alpha_3 \left[\widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]} \right]_{\Gamma^1} + \alpha_4 \left[\widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]} \right]_{\Gamma^1} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \left[\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} \right]_{\Gamma^1}, \end{aligned}$$

dimana persamaan terakhir berasal dari fakta bahwa semua rantai-rantai dasar bersifat homolog. Oleh karena itu, setiap anggota dari $H_0(\Gamma^1) = Z_0(\Gamma^1)/B_0(\Gamma^1)$ yang telah dihasilkan oleh $\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]}$ dan karenanya dim $H_0(\Gamma^1)$ =1. Jadi, diperoleh bahwa

$$H_k(\Gamma^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{jika } k = 0, 1, \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

Jadi, grup homologi dari suatu himpunan kubik diperoleh dengan menggunakan konsep operator batas. Jika homologi dari suatu himpunan kubiknya berbeda, maka himpunan kubiknya juga berbeda.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Dr. Dodi Devianto, Ibu Dr. Yanita, dan Ibu Dr. Lyra Yulianti yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bartle, Robert. G dan D. R. Sherbert. 1994. **Introduction to Real Analysis**, second edition. Eastern Michigan University, Singapore

[2] Herstein, I. N. 1999. **Topics in Algebra**. second edition. John Wiley and Sons, New York

[3] Jacob, Bill. 1990. **Linear Agebra**. W. H Freeman and Company, New York

[4] Kaczynsky, Tomasz. Konstantin Mischaikow, Marian Mrozek. 2004. **Computational Homology, Applied Mathematical Sciences, vol.57**. Springer-Verlag Inc, New York

[5] Yan, Min. 2010. **Topology**. Hongkong University of Science and Technology, Hongkong