

PENENTUAN ANGGOTA KELAS RAMSEY MINIMAL UNTUK PASANGAN $(2K_2, C_4)$

LIZA HARIYANI

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
liza.hariyani12@gmail.com*

Abstrak. Diberikan dua graf G dan H . Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F mengakibatkan F memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H . Graf F disebut sebagai graf Ramsey (G, H) -minimal jika $F \rightarrow (G, H)$ dan $F^* \not\rightarrow (G, H)$ untuk sebarang subgraf sejati $F^* \subset F$. Dalam makalah ini akan dikaji kembali tentang penentuan beberapa graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$.

Kata Kunci: Graf Ramsey Minimal, graf $2K_2$, graf C_4

1. Pendahuluan

Graf $G = (V, E)$ adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan titik berhingga tak kosong $V = V(G)$ dan himpunan sisi $E = E(G)$, yaitu himpunan bagian dari himpunan pasangan tak terurut dari anggota-anggota V . Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf. Jika $e = uv \in E(G)$, maka u disebut tetangga dari v , demikian juga sebaliknya.

Misalkan diberikan graf G dan H sebarang. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F mengakibatkan F memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H . Suatu *pewarnaan* (G, H) pada graf F didefinisikan sebagai pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F sedemikian sehingga F tidak memuat subgraf merah G sekaligus tidak memuat subgraf biru H . Jika suatu graf F^* mempunyai pewarnaan (G, H) , maka dinotasikan $F^* \not\rightarrow (G, H)$.

Dengan menggunakan notasi panah di atas dapat didefinisikan beberapa jenis bilangan Ramsey. Diberikan dua bilangan asli n_1 dan n_2 , *Bilangan Ramsey klasik* $R(n_1, n_2)$ adalah bilangan bulat terkecil m sedemikian sehingga $K_m \rightarrow (K_{n_1}, K_{n_2})$ dan $K_m - e \not\rightarrow (K_{n_1}, K_{n_2})$ untuk setiap $e \in E(K_m)$. *Bilangan Ramsey sisi* $\hat{r}(G, H)$ didefinisikan sebagai $\hat{r}(G, H) = \min\{q(F) \mid F \rightarrow (G, H), F - e \not\rightarrow (G, H)\}$ untuk setiap $e \in E(F)$, dengan $q(F)$ adalah banyaknya sisi di graf F . *Bilangan Ramsey graf* $R(G, H)$ didefinisikan sebagai minimum dari banyaknya titik graf lengkap K_n yang memenuhi $K_n \rightarrow (G, H)$ dan $K_n - e \not\rightarrow (G, H)$ untuk setiap $e \in E(K_n)$. Selanjutnya graf F disebut sebagai *graf Ramsey (G, H) -minimal* jika $F \rightarrow (G, H)$ dan $F - e \not\rightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F . Semua graf Ramsey (G, H) -minimal dikelompokkan dalam kelas yang dinamakan *kelas Ramsey (G, H) -minimal*,

yang dinotasikan sebagai $\mathcal{R}(G, H)$.

Karena tingkat kesulitan yang cukup tinggi, hasil yang diperoleh terkait $\mathcal{R}(G, H)$ masih sangat sedikit, bahkan untuk graf G dan H yang berukuran kecil atau yang berstruktur sederhana sekalipun. Oleh karena itu, masalah ini menjadi topik yang sangat menarik untuk dikaji. Makalah ini merupakan kajian ulang dari rujukan [3], yang membahas tentang penentuan beberapa graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$.

2. Landasan Teori

Misalkan u dan v adalah dua titik yang bertetangga di G . Jika terdapat lebih dari dua sisi yang menghubungkan u dan v , maka G dikatakan graf yang memuat sisi ganda. Selanjutnya jika titik-titik ujung dari suatu sisi terkait pada titik yang sama, maka sisi tersebut dinamakan loop. Graf G dikatakan graf sederhana apabila G tidak memuat sisi ganda dan loop. Untuk selanjutnya pada makalah ini hanya dibicarakan tentang graf sederhana.

Titik u disebut tetangga (*neighbour*) dari titik v jika $e = uv$ untuk suatu $e \in E(G)$. Lebih lanjut, titik u dan v dikatakan sebagai dua titik yang bertetangga, sedangkan sisi e dikatakan terkait (*incident*) dengan titik u dan v . Banyaknya sisi yang bertetangga dengan $v \in V(G)$ dikatakan derajat dari v di G , dinotasikan $d_G(v)$. Dua sisi e_1 dan e_2 pada G disebut sisi-sisi bertetangga jika e_1 dan e_2 terkait pada satu titik yang sama.

Berikut diberikan definisi dari graf Ramsey (G, H) -minimal.

Definisi 2.1. [3] Diberikan graf G dan H . Graf F dikatakan sebagai graf Ramsey (G, H) -minimal jika,

- (1) $F \rightarrow (G, H)$,
- (2) $F^* \not\rightarrow (G, H)$ untuk sebarang subgraf sejati $F^* \subset F$.

Selanjutnya, kelas Ramsey minimal $\mathcal{R}(G, H)$ didefinisikan sebagai kelas yang memuat semua graf F dengan kondisi pada Definisi diatas.

Pada [3] telah diperoleh beberapa syarat perlu untuk graf yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$ untuk $n \geq 3$ sebagai berikut.

Lema 2.2. [3] Misalkan graf $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$ untuk $n \geq 3$. Maka:

- (1) $F - v \supseteq C_n$ untuk setiap $v \in V(F)$ dan $F - e \supseteq C_n$ untuk setiap $e \in E(F)$.
- (2) $F - E(C_3) \supseteq C_n$ untuk setiap segitiga C_3 dalam F .
- (3) Setiap sisi $e \in E(F)$ selalu termuat dalam suatu siklus C_n di F .

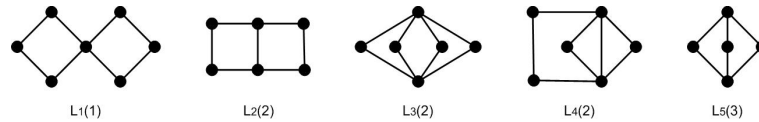
Akibat 2.3. [3] Satu-satunya graf yang tak terhubung yang berada dalam $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$ untuk $n \geq 3$ adalah $2C_n$.

Lema 2.4. [3] Misalkan $F \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_n)$, dengan $n \geq 3$. Maka:

- (1) Setiap dua siklus dengan panjang n di F memuat sedikitnya satu titik bersama.
- (2) Graf F memuat paling sedikit tiga siklus dengan panjang n dan tidak semua siklus tersebut beririsan disatu titik yang sama.

Pada bagian ini akan dibahas tentang langkah-langkah penentuan graf-graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$. Berdasarkan Lema 2.2 dan Lema 2.4, diperoleh bahwa setiap graf terhubung $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_4)$ dapat dibangun dari irisan dua siklus dengan panjang empat, dengan menambahkan paling sedikit satu siklus lain dengan panjang empat yang beririsan dengan kedua siklus pada titik yang berbeda.

Terdapat lima kemungkinan graf (yang tidak isomorfik) yang terbentuk dari irisan dua siklus dengan panjang empat. Namakan kelima graf tersebut sebagai *graf dasar*, dan dinotasikan sebagai $L_1(1), L_2(2), L_3(2), L_4(2)$ dan $L_5(3)$ (lihat Gambar 2.1). Notasi $L_i(j)$ berarti graf ke- i yang diperoleh dari dua siklus dengan panjang empat yang beririsan di sebanyak j buah titik. Dapat dilihat bahwa graf dasar



Gambar 2.1. Irisan antara dua C_4 .

$L_5(3)$ adalah subgraf dari $L_3(2)$. Karena yang akan dibangun adalah graf Ramsey minimal, maka untuk selanjutnya graf $L_3(2)$ tidak digunakan. Berdasarkan Lema 2.2(2), dapat diasumsikan bahwa F dalam $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$ memuat dua siklus yang tidak beririsan di seberang titik atau sisi dalam suatu segitiga di F . Maka graf $L_4(2)$ tidak digunakan dalam konstruksi graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$.

Pada Teorema berikut akan dikaji kembali bahwa graf F_1, F_2, \dots, F_{12} bersama dengan $2C_4$ (Gambar 2.2), yang dibangun dari graf dasar $L_1(1), L_2(2)$ dan $L_5(3)$, merupakan anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$.

Teorema 2.5. $\mathcal{R}(2K_2, C_4) \supseteq \{2C_4\} \cup \{F_1, F_2, \dots, F_{12}\}$.

Bukti. Berdasarkan Akibat 2.3 diperoleh $2C_4 \in \mathcal{R}(2K_2, C_4)$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $F_1, F_2, \dots, F_{12} \subseteq \mathcal{R}(2K_2, C_4)$, pandang beberapa kasus berikut.

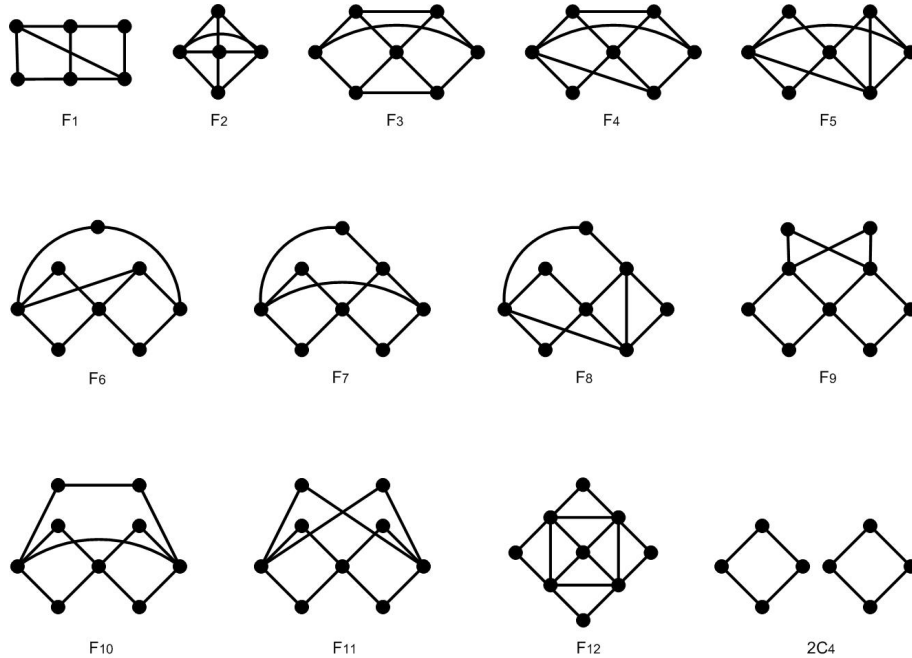
Kasus 1. F dibangun dari $L_2(2)$.

Kita harus menambahkan beberapa sisi dan/atau titik ke $L_2(2)$ untuk memperoleh $F \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$. Berdasarkan Lema 2.2(3), setiap sisi dan/atau titik yang ditambahkan harus termuat dalam suatu siklus C_4 di F .

Misalkan satu sisi ditambahkan ke $L_2(2)$. Berdasarkan persyaratan dalam Lema 2.2(1) dan Lema 2.4(1), diperoleh graf F_1 (Gambar 2.2).

Akan ditunjukkan bahwa $F_1 \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap F_1 . Misalkan tidak terdapat $2K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut. Maka subgraf yang diinduksi oleh sisi-sisi merah berbentuk $K_{1,2}$ atau $K_{1,3}$. Untuk setiap $K_{1,2}$ atau $K_{1,3}$ merah di F_1 , selalu diperoleh C_4 biru. Sehingga $F_1 \rightarrow (2K_2, C_4)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $F_1^* := F_1 - e \not\rightarrow (2K_2, C_4)$ untuk sebarang



Gambar 2.2. Anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$.

$e \in E(F_1)$. Notasikan

$$V(F_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},$$

$$E(F_1) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_6, x_1x_6, x_1x_4, x_2x_5\}.$$

Misalkan $e = x_1x_6$. Maka warnai sisi-sisi x_1x_4, x_3x_4 dan x_4x_5 dengan merah, sementara sisi-sisi lainnya diwarnai biru sedemikian sehingga tidak diperoleh C_4 biru dalam pewarnaan tersebut. Untuk sisi $e = x_3x_4$ pembuktian dilakukan dengan cara yang sama. Selanjutnya, misalkan $e = x_1x_2$. Maka sisi-sisi x_2x_5, x_4x_5, x_5x_6 diwarnai merah. Untuk $e = x_2x_3, x_4x_5, x_5x_6$, pembuktian dilakukan dengan cara yang sama. Jika $e = x_2x_5$ maka warnai sisi x_1x_4, x_3x_4, x_4x_5 dengan merah. Jika $e = x_1x_4$ maka warnai sisi x_1x_2, x_2x_5, x_2x_3 dengan merah. Maka $F_1 \in \mathcal{R}(2K_2, C_4)$.

Misalkan dua sisi ditambahkan ke $L_2(2)$. Semua graf baru, yang diperoleh setelah penambahan dua sisi, yang memuat F_1 sebagai subgraf diabaikan, karena graf tersebut bukan merupakan graf Ramsey $(2K_2, C_4)$ -minimal. Dapat dilihat bahwa graf lain yang berasal dari penambahan dua sisi ke $L_2(2)$ tidak termuat dalam $\mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$ karena tidak memenuhi syarat Lema 2.2(1) atau Lema 2.4(2). Maka tidak diperoleh graf Ramsey $(2K_2, C_4)$ -minimal baru yang diperoleh dengan cara penambahan dua sisi ke $L_2(2)$.

Penambahan lebih banyak sisi (tanpa penambahan titik) akan menghasilkan graf yang memuat F_1 atau F_2 (Gambar 2.2) sebagai subgraf. Graf F_2 adalah graf yang dibangun dari graf dasar $L_5(3)$.

Penambahan titik-titik pada $L_2(2)$ akan menghasilkan graf yang memuat salah

satu dari F_3, F_4, \dots, F_{12} (Gambar 2.2) sebagai subgraf. Graf-graf F_3, F_4, \dots, F_{12} adalah graf-graf yang dibangun dari $L_1(1)$. Maka satu-satunya anggota $\mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$ yang berasal dari $L_2(2)$ adalah F_1 .

Kasus 2. F dibangun dari $L_5(3)$.

Seperti dalam pembuktian Kasus 1, beberapa sisi dan/atau titik ditambahkan ke graf dasar $L_5(3)$ untuk memperoleh $F \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$.

Misalkan hanya sisi yang ditambahkan. Jika paling banyak dua sisi yang ditambahkan ke $L_5(3)$ maka graf yang diperoleh bukan merupakan anggota $\mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$ karena tidak memenuhi syarat Lema 2.2(1) atau Lema 2.2(2) atau Lema 2.4(1). Jika ditambahkan tiga sisi maka diperoleh $F_2 \cong K_5 - e$ (Gambar 2.2) sebagai anggota $\mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$. Penambahan titik (dan sisi) ke $L_5(3)$ mengakibatkan graf yang diperoleh akan memuat salah satu dari F_3, F_4, \dots, F_{12} (Gambar 2.2) sebagai subgrafnya.

Akan dibuktikan bahwa $F_2 \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap F_2 . Misalkan tidak terdapat $2K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut. Maka subgraf yang diinduksi oleh sisi-sisi merah adalah $K_{1,3}, K_{1,4}$ atau C_3 . Untuk setiap $K_{1,3}, K_{1,4}$ atau C_3 merah dalam pewarnaan tersebut, selalu diperoleh C_4 biru. Maka $F_2 \rightarrow (2K_2, C_4)$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $F_2^* := F_2 - e \rightarrow (2K_2, C_4)$ untuk setiap $e \in E(F_2)$. Notasikan

$$\begin{aligned} V(F_2) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \\ E(F_2) &= \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_2x_4\}. \end{aligned}$$

Misalkan $e = x_1x_2$. Maka sisi-sisi $x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5$ diwarnai merah dan sisi-sisi lainnya diwarnai biru sedemikian sehingga tidak diperoleh C_4 biru dalam pewarnaan tersebut. Untuk $e = x_3x_4, x_2x_3$ atau x_1x_4 , pembuktian dilakukan dengan cara yang sama. Misalkan $e = x_1x_5$. Maka warnai sisi-sisi x_3x_5, x_3x_4, x_4x_5 dengan merah. Pembuktian untuk $e = x_3x_5$ dilakukan dengan cara yang sama. Selanjutnya misalkan $e = x_2x_5$. Maka sisi-sisi x_1x_4, x_4x_5, x_1x_5 diwarnai merah. Pembuktian untuk $e = x_4x_5$ dilakukan dengan cara yang sama. Jika $e = x_2x_4$, maka warnai sisi-sisi x_1x_4, x_4x_5, x_1x_5 dengan merah. Sehingga diperoleh $F_2 \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$.

Kasus 3. F dibangun dari $L_1(1)$.

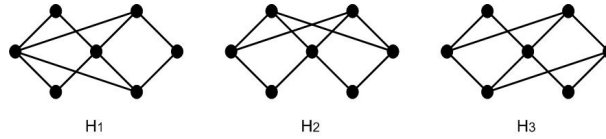
Misalkan hanya sisi yang ditambahkan ke $L_1(1)$. Maka diperoleh beberapa kasus berikut.

Kasus 3.1 Paling banyak dua sisi ditambahkan ke $L_1(1)$.

Menurut Lema 2.2(1), graf F harus memuat siklus C_4 baru yang tidak memuat titik berderajat empat. Siklus baru ini harus memuat paling sedikit dua sisi dari kedua C_4 yang ada di $L_1(1)$, tidak termasuk titik yang berderajat empat. Dengan cara ini diperoleh graf H_1, H_2 dan H_3 (Gambar 2.3), tetapi ketiga graf tersebut bukan anggota $\mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$ karena memuat F_1 (Gambar 2.2) yang berasal dari $L_2(2)$ sebagai subgrafnya.

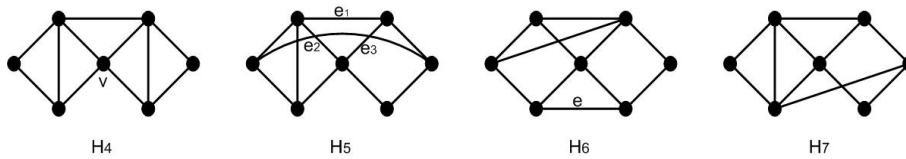
Kasus 3.2 Penambahan tiga sisi ke $L_1(1)$.

Semua graf yang memuat H_1, H_2 atau H_3 sebagai subgrafnya diabaikan. Maka diperoleh graf F_3, F_4 dan F_5 (Gambar 2.2) sebagai anggota $\mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$.



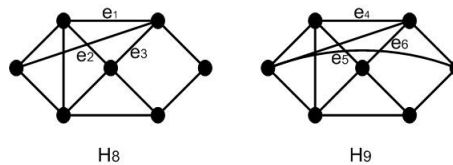
Gambar 2.3. H_1, H_2 dan H_3 .

Graf lain yang diperoleh dengan cara penambahan tiga sisi ke $L_1(1)$ bukan merupakan graf Ramsey $(2K_2, C_4)$ -minimal karena tidak memenuhi persyaratan dalam Lema 2.2, ataupun karena memuat graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$ sebagai subgrafnya. Sebagai contoh, lihat Gambar 2.4. Semua sisi yang terkait dengan titik v di H_4 dan semua sisi pada segitiga $e_1e_2e_3$ di H_5 dapat diwarnai dengan warna merah sedemikian sehingga tidak terdapat C_4 biru pada pewarnaan terhadap H_4 dan H_5 . Dapat dilihat bahwa sisi e di H_6 tidak termuat dalam sebarang C_4 di graf tersebut, dan H_7 memuat F_1 sebagai subgrafnya. Maka $H_4 \notin \mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$. Demikian pula halnya dengan H_5, H_6 dan H_7 .



Gambar 2.4. H_4, H_5, H_6 dan H_7 .

Kasus 3.3 Penambahan paling sedikit empat sisi ke $L_1(1)$. Semua graf yang memuat F_3, F_4, F_5 (Gambar 2.2) atau H_1, H_2, H_3 (Gambar 2.3) atau H_7 (Gambar 2.4) sebagai subgrafnya diabaikan. Graf lainnya yang diperoleh dengan cara penambahan paling sedikit empat sisi ke $L_1(1)$ bukan merupakan graf Ramsey $(2K_2, C_4)$ -minimal karena tidak memenuhi persyaratan dalam Lema 2.2. Sebagai contoh, lihat Gambar 2.5. Kita dapat mewarnai segitiga $e_1e_2e_3$ di H_8 dan $e_4e_5e_6$ di H_9 dengan warna merah sedemikian sehingga tidak diperoleh C_4 biru dalam pewarnaan terhadap H_8 dan H_9 .



Gambar 2.5. H_8 dan H_9 .

Kasus 3.4 Penambahan satu titik v ke $L_1(1)$.

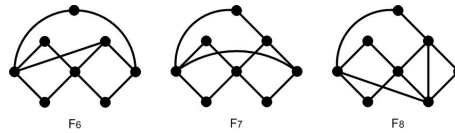
Jika satu titik ditambahkan ke $L_1(1)$, maka berdasarkan Lema 2.2(3), titik tersebut harus termuat dalam suatu C_4 baru. Menurut Lema 2.2(1) dan Lema 2.4(1), siklus C_4 baru (dimana v menjadi salah satu titiknya) tidak memuat titik yang berderajat empat di $L_1(1)$. Maka perlu ditambahkan paling sedikit tiga sisi ke $L_1(1)$. Diperoleh F_6 dan F_7 (Gambar 2.2) sebagai anggota $\mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$ yang berasal dari penambahan satu titik dan tiga sisi, serta F_8 (Gambar 2.2) yang berasal dari penambahan satu titik dan empat sisi ke $L_1(1)$.

Kasus 3.5 Penambahan dua titik u dan v ke $L_1(1)$.

Jika dua titik ditambahkan ke $L_1(1)$ (namakan u dan v), maka berdasarkan Lema 2.2(3), titik-titik tersebut harus termuat dalam siklus C_4 yang baru.

Jika terdapat satu siklus C_4 baru yang memuat u dan v , maka berdasarkan Lema 2.2(1), siklus C_4 baru tersebut tidak memuat titik berderajat empat di $L_1(1)$. Berdasarkan Lema 2.4(1), harus ditambahkan paling sedikit empat sisi ke $L_1(1)$. Maka diperoleh F_9, F_{10}, F_{11} dan F_{12} (Gambar 2.2) sebagai anggota $\mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$ yang berasal dari $L_1(1)$ dengan penambahan dua titik.

Jika kedua titik u dan v tidak berada dalam siklus C_4 yang sama, maka graf yang diperoleh akan memuat graf dalam Kasus 3.4, yaitu F_6, F_7 atau F_8 (Gambar 2.6) sebagai subgrafnya.



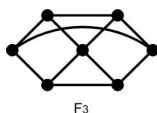
Gambar 2.6. F_6, F_7 atau F_8 .

Kasus 3.6 Penambahan paling sedikit tiga titik ke $L_1(1)$.

Misalkan terdapat siklus C_4 baru yang memuat paling banyak dua dari semua titik yang ditambahkan. Maka graf yang diperoleh akan memuat graf pada Kasus 3.4 atau Kasus 3.5. Hal ini menyebabkan siklus C_4 baru tersebut harus memuat paling sedikit tiga titik yang ditambahkan ke $L_1(1)$. Karena C_4 baru tersebut harus beririsan dengan kedua C_4 sebelumnya, maka berdasarkan Lema 2.4 (1), siklus C_4 baru tersebut memuat titik berderajat empat di $L_1(1)$. Hal ini bertentangan dengan Lema 2.4(2). Sehingga tidak diperoleh graf anggota $\mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$ yang berasal dari penambahan paling sedikit tiga titik ke $L_1(1)$.

Selanjutnya dibuktikan bahwa $F_3 \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$. Untuk graf F_4, F_5, \dots, F_{12} pembuktian dilakukan dengan cara serupa. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap F_3 sedemikian sehingga tidak terdapat $2K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut. Maka subgraf yang diinduksi oleh sisi-sisi merah berbentuk $K_{1,4}, K_{1,3}$ dan C_3 . Untuk setiap kemungkinan tersebut, selalu diperoleh adanya C_4 biru dalam pewarnaan. Sehingga $F_3 \rightarrow (2K_2, C_4)$.

Akan ditunjukkan bahwa $F_3^* = F_3 - e \rightarrow (2K_2, C_4)$ untuk setiap sisi $e \in E(F_3)$.

Gambar 2.7. F_3 .

Tuliskan

$$V(F_3) = \{x_1, x_2, \dots, x_7\},$$

$$E(F_3) = \{x_1x_2, x_1x_4, x_1x_5, x_1x_7, x_2x_3, x_3x_4, x_5x_6, x_6x_7\} \cup \{x_2x_5, x_3x_6, x_4x_7\}.$$

Misalkan $e = x_1x_2$. Maka sisi-sisi x_5x_6, x_6x_7, x_3x_6 diwarnai merah dan sisi-sisi lainnya diwarnai biru sedemikian sehingga tidak diperoleh C_4 biru dalam pewarnaan tersebut. Untuk $e = x_1x_4, x_1x_5, x_1x_7$, pembuktian dilakukan dengan cara yang sama. Misalkan $e = x_2x_3$. Maka warnai sisi-sisi x_5x_6, x_6x_7, x_3x_6 dengan merah. Untuk $e = x_3x_4, x_5x_6, x_6x_7$, pembuktian dilakukan dengan cara yang sama. Jika $e = x_2x_5$ maka sisi-sisi x_1x_4, x_1x_7, x_4x_7 diwarnai merah. Pembuktian untuk $e = x_4x_7$ dilakukan dengan cara yang sama. Jika $e = x_3x_6$ maka warnai sisi-sisi $x_1x_2, x_1x_4, x_1x_5, x_1x_7$ dengan merah. Maka $F_3 \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_4)$. \square

3. Kesimpulan

Misalkan diberikan dua graf G dan H . Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F mengakibatkan F memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H . Graf F disebut sebagai graf Ramsey (G, H) -minimal jika $F \rightarrow (G, H)$ dan $F^* \not\rightarrow (G, H)$ untuk sebarang subgraf sejati $F^* \subset F$. Kemudian diperoleh kembali beberapa graf terhubung yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$. Selanjutnya telah ditunjukkan kembali bahwa satu-satunya graf tak terhubung yang menjadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$ adalah $2C_4$.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Lyra Yulianti, Bapak Budi Rudianto, Bapak Narwen, Bapak Ahmad Iqbal Baqi dan Bapak Zulakmal yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Baskoro, E.T, dkk. 2002. On Ramsey Number for Trees versus Wheels of Five or Six Vertices. *Graph and Combinatorics* 4 : 717 – 721
- [2] Hasmawati. 2007. Bilangan Ramsey untuk Graf Gabungan Bintang. ITB Bandung. Disertasi-S3. Tidak diterbitkan
- [3] Yulianti, L., Baskoro, E.T., Assiyatun, H., dan Uttunggadewa, S. 2009. Ramsey $(2K_2, C_4)$ -minimal Graphs. *Diajukan ke Discussiones Mathematicae Graph Theory*.