

## ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA PADA PENYEBARAN COVID VARIAN OMICRON DENGAN KONTROL VAKSINASI

BITA WULANDARI\*, M. NUR HAQQUL QOMARUDIN,  
ARDHI SANWIDI, RIZKA RIZKY ROBBY

*Universitas Nahdlatul Ulama Blitar,  
Jl. Masjid No.22, Blitar  
email : biiita067@gmail.com, haqquludin@gmail.com,  
ardhisawidi@gmail.com, rizka.ertiga@gmail.com*

Diterima 18 September 2022    Direvisi 18 Desember 2022    Dipublikasikan 30 Januari 2023

**Abstrak.** Pandemi Covid-19 telah berlangsung selama kurang lebih dua tahun melanda Indonesia. Selama masa pandemi berlangsung virus Covid telah banyak mengalami mutasi. Proses mutasi tersebut menghasilkan varian-varian baru, dimana varian terbaru yang telah ditemukan dikenal dengan varian Omicron. Varian ini memiliki tingkat penularan yang sangat pesat. Untuk mengatasi masalah penyebaran Omicron perlu dilakukan analisis penyebaran melalui pemodelan matematika. Penelitian ini menggunakan metode studi literatur terkait Omicron, khususnya pemodelan menggunakan kontrol vaksinasi. Penelitian ini menganalisis model SLIR penyebaran Covid varian Omicron dengan kontrol vaksinasi. Model yang dibentuk dianalisis dengan penentuan kesetimbangan, kestabilan dan dilanjutkan penambahan kontrol kemudian disimulasikan secara numerik. Model ini memiliki empat subpopulasi, yaitu *Susceptible*, *Latent*, *Infected*, dan *Recovery*, dengan penambahan parameter migrasi pada subpopulasi *Susceptible* dan *Latent*, yang membentuk sistem persamaan diferensial nonlinear. Hasil analisis model ini memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil saat  $k_1 - k_2 < \pi_2 < k_1 + k_2$ . Kestabilan endemik memenuhi  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$  dan  $a_1 a_2 > a_3$ , sehingga disimpulkan stabil asimtotik dengan penambahan kontrol berupa vaksinasi. Jika vaksinasi dapat dilakukan secara masif setidaknya selama 100 hari, maka jumlah individu terinfeksi dapat dikendalikan dengan baik, serta pengurangan parameter migrasi yang diperoleh dapat meminimumkan jumlah populasi laten dan terinfeksi pada penderita Omicron, sehingga penyebaran penyakit dapat dikendalikan serta dampak dari penyebaran penyakit dapat diminimalkan.

**Abstract.** The COVID-19 pandemic has been present for around two years in Indonesia. Throughout the pandemic, the COVID-19 virus has undergone a number of changes. The Omicron variant is the most recent variant to be identified. New variants are created via the process of mutation. The transmission rate of this model is extremely quick. Mathematical modeling must be used to study the distribution in order to solve the Omicron distribution problem. This work employs an omicron-related literature study methodology, particularly modeling with vaccination control. The SLIR model of the

\*penulis korespondensi

*omicron form of COVID's dissemination under vaccination control will be examined in the study. The model that results will be examined for equilibrium and stability, followed by the insertion of controls, and finally, numerical simulation. The model comprises four sub-populations: susceptible, latent, infected, and recovered. The susceptible and latent sub-populations also have migratory factors included, creating a system of nonlinear differential equations. The examination of this model yielded two equilibrium points, the endemic and disease-free equilibrium points. The disease-free equilibrium point will be stable when  $k_1 - k_2 < \pi_2 < k_1 + k_2$ . The endemic point is inferred to be asymptotically stable because  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$ , and  $a_1 a_2 > a_3$  are satisfied. Additionally, if vaccination can be administered widely for at least 100 days, the number of infected people can be effectively controlled, and the decrease in migration parameters obtained can reduce the number of latent and infected populations in Omicron patients, allowing the spread of the disease to be controlled and the impact of it to be reduced.*

*Kata Kunci: Covid Omicron, Titik Ekuilibrium, Vaksinasi*

## 1. Pendahuluan

Corona Disease 2019 (Covid-19) merupakan penyakit sindrom pernafasan yang disebabkan oleh salah satu jenis corona virus SARS-Co-2. Penyakit Covid-19 dapat menimbulkan berbagai gejala dari berat, sedang dan ringan dengan gejala klinis utama yang muncul, yaitu demam, batuk, dan kesulitan bernapas. Virus corona memiliki tingkat mutasi yang sangat cepat, dimana saat ini telah muncul berbagai varian virus baru. Diantaranya varian yang telah terdeteksi adalah alpha, beta, delta dan terbaru yang dikenal sebagai varian Omicron [14].

Di Indonesia varian Omicron pertama kali terdeteksi pada WNI yang tiba dari Nigeria pada tanggal 27 November 2021. WNI ini merupakan salah satu warga yang sedang menjalankan karantina di Rumah Sakit Darurat Covid-19 (RSDC) Wisma Atlet Kemayoran Jakarta hingga menular kepada petugas kebersihan yang bekerja di RSDC Wisma Atlet. Varian Omicron memiliki tingkat penularan lima kali lipat dari varian Delta, terdeteksi merebak luas pertama kali di negara-negara Afrika bagian selatan. Menurut Kepala Dinas Kesehatan, Pengendalian Penduduk, dan Keluarga Berencana (Dikes, PP, dan KB). Varian Omicron memiliki tingkat penularan lebih cepat dibanding varian delta, namun kegawatan kasus Omicron tidak lebih parah dari varian lainnya dan risiko perawatan pasien Omicron di rumah sakit lebih rendah dibandingkan dengan varian delta. Namun penularan Omicron tidak dapat diabaikan karena dapat memicu gelombang infeksi lebih lanjut [1].

Diperlukan beberapa upaya untuk menekan penyebaran virus Omicron agar dapat menekan penyebaran virus tersebut. Salah satu upaya yang dilakukan, yaitu dengan memenuhi protokol kesehatan seperti memakai masker, menjaga jarak, mencuci tangan, serta menjauhi kerumunan. Selain itu melaksanakan vaksinasi diyakini dapat mencegah tertularnya penyakit Omicron kepada individu lain. Dari penelitian terbaru yang dilaksanakan oleh University Of Hong Kong dan Chinese University of Hong Kong menyatakan bahwa vaksin mRNA Pfizer-BioNTech lebih efektif, karena dosis vaksin tersebut diyakini dapat memberikan perlindungan antibodi lebih terhadap Omicron dibandingkan dengan vaksin Sinovac dan Pfizer. Diharapkan masyarakat yang mendapatkan vaksin Sinovac dan Pfizer untuk segera mengikuti vaksin ketiga mRNA Pfizer-BioNTech.

Salah satu upaya untuk memperoleh gambaran vaksin di masyarakat adalah

melalui pemodelan. Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk merepresentasi dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau masalah pada dunia riil dalam pernyataan matematika, sehingga diperoleh pemahaman dari masalah dunia riil menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai Model Matematika. Konstruksi, analisis dan penggunaan model matematika dipandang sebagai salah satu aplikasi matematika yang dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah dalam dunia riil [11].

Dalam penelitian ini pemodelan matematika digunakan sebagai salah satu cara untuk memprediksi kondisi penyebaran Omicron di Indonesia dengan kondisi yang dinamis, dengan penambahan kontrol vaksin untuk meningkatkan kekebalan terhadap virus Omicron, serta dengan pengendalian parameter migrasi yang masuk pada subpopulasi *Susceptible* dan *Latent*. Dengan melalui tahapan-tahapan yang dilakukan untuk memperoleh hasil berdasarkan ketentuan dalam pemodelan, diharapkan dapat menurunkan resiko penularan Omicron.

Pada penelitian sebelumnya, Agusyarif dkk. [8] menggunakan pemodelan matematika untuk menganalisis penyebaran Covid-19 dengan intervensi vaksinasi dan pengobatan. Diperoleh bahwa hasil sistem stabil pada titik kesetimbangan endemik dengan efektivitas vaksin yang diperlukan untuk menghentikan terjadinya wabah adalah minimal sebesar 59%, serta diperlukan tingkat keberhasilan pengobatan minimal 6,8% perhari agar penyakit tidak berkembang menjadi wabah.

Pada penelitian ini akan dilakukan modifikasi model matematika penyebaran Covid varian Omicron dengan penambahan kontrol berupa vaksinasi dan penambahan parameter migrasi. Untuk mengetahui tingkah laku model dilakukan dengan analisis terhadap titik kesetimbangan model. Selain itu model juga akan diteliti untuk melihat dinamika populasi akibat penyebaran Omicron dengan melakukan simulasi secara numerik.

## **2. Landasan Teori**

### **2.1. Titik ekuilibrium (titik kesetimbangan)**

Titik ekuilibrium merupakan titik yang tidak akan berubah terhadap waktu, dimana pada saat  $t = 1, 2, \dots, n$ , nilai titik tersebut akan tetap dan tidak akan berubah. Keadaan setimbang adalah suatu keadaan tertentu saat perubahan populasinya konstan atau bernilai nol [4]. Terdapat dua titik setimbang yaitu titik setimbang bebas penyakit dan titik setimbang penyebaran penyakit. Titik setimbang bebas penyakit terjadi ketika tidak ada manusia yang menyebarkan penyakit. Selanjutnya adalah titik setimbang penyebaran penyakit, yaitu suatu kondisi ketika terjadi penyebaran penyakit [9].

### **2.2. Linierisasi**

Linierisasi digunakan untuk mengubah sistem non-linear menjadi sistem linear. Linierisasi tersebut dapat digunakan untuk menganalisis kestabilan. Linierisasi merupakan bentuk dari gambaran perilaku dari sistem di sekitaran titik ekuilibriumnya [7]. Untuk mencari hasil pelinieran dari sistem persamaan diferensial tak linier digunakan matriks Jacobian.

### 2.3. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Penyelesaian sistem persamaan differensial dapat dicari secara analitik atau numerik. Kestabilan titik equilibrium digunakan untuk melihat apakah suatu titik ekuilibrium dari sistem persamaan differensial bersifat stabil atau tidak. Dalam hal ini, jika diberikan suatu persamaan differensial orde satu  $\dot{x} = f(x)$  yang memiliki solusi  $x(t, x_0)$ , dengan kondisi awal  $x(0) = x_0$ . Dalam [10], suatu titik ekuilibrium  $\bar{x}$  dikatakan:

- (i) Stabil, jika untuk setiap  $\epsilon > 0$ , terdapat  $\delta > 0$  sedemikian sehingga jika  $|x_0 - \bar{x}| < \delta$ , maka  $|x(t, x_0) - \bar{x}| < \epsilon$  untuk setiap  $t \geq 0$ .
- (ii) Stabil asimtotik, jika stabil, dan terdapat  $\delta > 0$  sedemikian sehingga jika  $|x_0 - \bar{x}| < \delta$ , maka  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0) - \bar{x}| = 0$ .
- (iii) Tidak stabil jika (i) tidak terdefinisi.

### 2.4. Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz merupakan salah satu teknik yang digunakan untuk menganalisis kestabilan. Perhitungan nilai eigen dari suatu polinomial dapat digunakan dengan metode Routh-Hurwitz. Metode ini dapat digunakan jika nilai eigen pada matriks A adalah akar-akar persamaan karakteristik polinomial [2].

$$\det(\lambda I - A) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda^1 + a_0, \quad (2.1)$$

dengan  $a_0 = 1$ .

Jika diberikan suatu persamaan karakteristik dalam bentuk polinomial:

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda^1 + a_0, \quad (2.2)$$

dimana  $a_0 = 1$  dan  $a_k$  dengan  $k = 1, 2, \dots, n$  adalah bilangan riil, maka didefinisikan matriks  $H_n$  sebagai berikut.

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

dengan  $a_k = 0$  untuk  $k > n$ . Semua akar polinomial  $P(\lambda)$  negatif atau negatif bagian real jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz positif:

$$\det(H_n) > 0 \quad (2.4)$$

untuk  $n = 1, 2, 3, \dots, j$ .

### 2.5. Prinsip Dasar Pontryagin

Misalkan diberikan persamaan pembangkit.

$$\dot{x}(x) = f(x, u(t), t), \quad (2.5)$$

dengan fungsi objektif

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t))dt. \quad (2.6)$$

Dalam hal ini kondisi batas yang diberikan adalah:

$$x(t_0) = x_0, \quad (2.7)$$

$$x(t_f) = x_f. \quad (2.8)$$

Solusi permasalahan kontrol optimal tersebut diperoleh dengan melakukan langkah-langkah sebagai berikut [15]:

- (1) Pembentukan fungsi Pontyargin.

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t). \quad (2.9)$$

- (2) Penentuan nilai minimal  $\mathcal{H}$  berdasarkan  $u(t)$ . Dalam hal ini,  $(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u})^* = 0$ , sedemikian hingga diperoleh

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t). \quad (2.10)$$

- (3) Selanjutnya dengan menggunakan langkah-langkah pada (1) dan(2), maka dapat diperoleh nilai optimal atas  $\mathcal{H}^*$ .
- (4) Setelah melakukan langkah ketiga, diperoleh persamaan differensial beserta kondisi awal dan kondisi akhir yang diinginkan. Oleh karena itu, langkah pada tahap ini adalah menyelesaikan persamaan yang diperoleh.

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= (\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}), \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

dengan kondisi awal yaitu

$$[\mathcal{H}^* + \frac{\partial S}{\partial t}]_{t_f} \delta t_f + [(\frac{\partial S}{\partial x})^* - \lambda^*(t)]'_{t_f} \delta x_f = 0. \quad (2.12)$$

- (5) Substitusikan hasil yang diperoleh pada langkah (4) ke dalam persamaan  $u^*(t)$  di langkah (2) untuk memperoleh nilai dari optimal kontrol.

## 2.6. Simulasi Numerik

Dalam pemodelan ini Matlab digunakan untuk mengimplementasikan hasil simulasi penyebaran penyakit. Simulasi yang dimaksud adalah suatu simulasi yang merupakan penyelesaian numerik dari sistem, yang bertujuan untuk memperlihatkan secara visual sifat kestabilan dari titik kesetimbangan [3]. Selain itu, dengan melakukan simulasi numerik kita dapat melihat perubahan yang bersifat dinamis dari setiap kelas populasi pada model [8]. Simulasi numerik ini diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4.

### 3. Hasil dan Pembahasan

#### 3.1. Model Matematika Penyebaran Covid Varian Omicron

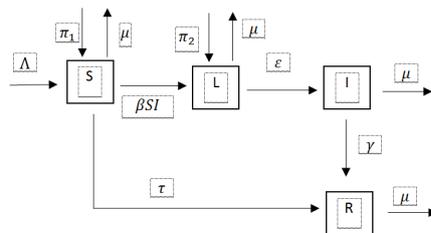
Model yang digunakan dalam penyebaran Covid varian Omicron ini adalah model SLIR (*Susceptible Latent Infected Recovered*) dari [5]. Jumlah penambahan individu terinfeksi pada model tersebut dikendalikan dengan adanya proses vaksinasi yang diberikan pada individu *susceptible*. Berdasarkan [16], dijelaskan bahwa terdapat kebiasaan baru di masa Covid-19 yang dapat menyebabkan banyaknya orang yang sering bepergian, baik di dalam kota maupun di luar kota, guna untuk keperluan tertentu. Penyebaran Covid-19 tipe Omicron yang begitu cepat sedemikian dengan banyaknya masyarakat yang aktif bepergian, khususnya menggunakan transportasi umum, menambah dampak penularan virus Covid-19 semakin meningkat. Oleh karena itu, sangat penting untuk dilakukan suatu pengamatan mengenai dampak dan efektifitas penyebaran virus Covid-19 tipe Omicron akibat adanya perpindahan penduduk (imigrasi) dari suatu individu.

Berdasarkan [18], seseorang yang terkena gejala namun belum dinyatakan positif dari hasil pemeriksaan dapat menjadi media dalam penularan, jika orang tersebut bepergian keluar rumah atau bahkan keluar daerah tertentu. Oleh karena itu, berdasarkan [12], maka subpopulasi *Susceptible* dan *Latent* untuk model dalam [5], dapat direkonstruksi dengan menambahkan parameter migrasi, sebagai akibat dari perpindahan penduduk yang bisa dilakukan oleh individu yang sehat (rentan) dan individu *Latent*.

Model dinamis yang dijabarkan pada penelitian ini dibagi ke dalam empat kelas, yaitu:

- (a) *Susceptible* (S), dimana individu rentan terkena penyakit,
- (b) *Latent* (L), yaitu individu yang tertular penyakit tetapi belum menunjukkan tanda-tanda terjangkit penyakit atau sudah mengalami gejala namun belum positif terinfeksi,
- (c) *Infected* (I), yaitu populasi yang terinfeksi dapat menularkan penyakit,
- (d) *Recovered* (R), yaitu populasi dalam masa pengobatan dan sudah ada tanda-tanda sembuh.

Diagram kompartemen penyebaran Covid varian Omicron dalam penelitian ini diberikan dalam Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Kompartemen Model Penyebaran Covid varian Omicron

Berdasarkan diagram pada Gambar 1, model Penyebaran Covid varian Omicron dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial nonlinear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 S' &= \Lambda + \pi_1 - (\beta I + \tau + \mu)S, \\
 L' &= \pi_2 L + \beta SI - (\epsilon + \mu)L, \\
 I' &= \epsilon L - (\gamma + \mu)I, \\
 R' &= \gamma I + \tau S - \mu R,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan  $S(t)+L(t)+I(t)+R(t) = N(t)$ , dimana  $N(t)$  merupakan jumlah keseluruhan populasi dan  $S(t), L(t), I(t), R(t) \geq 0$  dalam periode waktu  $t$ .

Nilai-nilai parameter yang digunakan pada penelitian ini adalah:

- $\Lambda$  : laju kelahiran penduduk,
- $\mu$  : laju kematian alami yang terjadi bagi tiap individu dalam populasi,
- $\beta$  : laju penularan dari infeksi penyakit Covid-19 tipe Omicron,
- $\tau$  : laju vaksinasi yang diperlukan untuk mengendalikan penyebaran virus,
- $\epsilon$  : rata-rata individu yang telah dinyatakan positif terinfeksi,
- $\gamma$  : rata-rata individu terinfeksi yang telah dinyatakan sembuh,
- $\pi_1$  : laju migrasi yang dialami oleh individu rentan,
- $\pi_2$  : laju migrasi pada kelas laten.

Asumsi-asumsi yang digunakan pada penelitian ini adalah:

- (1) Terdapat kelahiran dan kematian dalam suatu populasi,
- (2) Kematian ada karena kematian alami bukan disebabkan oleh penyakit,
- (3) Setiap individu lahir akan menjadi rentan,
- (4) Penyakit dapat disembuhkan,
- (5) Vaksinasi diberikan kepada populasi rentan (*Susceptible*),
- (6) Migrasi terjadi pada kelas *Susceptible* dan *Latent*, dan
- (7) Individu yang telah terinfeksi dapat dinyatakan sembuh dari penyakit.

### 3.2. Analisis Kestabilan

Model penyebaran virus Covid varian Omicron pada persamaan (3.1) yang terbentuk merupakan persamaan diferensial nonlinear. Untuk melakukan analisis kestabilan pada model tersebut, berdasarkan [2], analisis kestabilan tersebut dapat diberikan dengan menganalisis nilai eigen yang diperoleh dari persamaan karakteristik  $|J - \lambda I| = 0$ .

Suatu sistem dinamis dikatakan stabil jika untuk setiap nilai eigen yang diperoleh memiliki bagian riil yang bernilai negatif, yakni  $Re(\lambda_i) < 0$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Selanjutnya, untuk mencari persamaan karakteristik maka harus dicari matriks Jacobi yang berasal dari sistem persamaan (3.1) yang telah dilinierisasikan menggunakan deret Taylor di sekitar titik tetap (setimbang).

Langkah selanjutnya adalah linierisasi pada model (3.1) di sekitar titik kesetimbangan. Berdasarkan penjelasan tersebut, maka pada pengamatan ini akan dicari

titik kesetimbangan pada persamaan (3.1). Titik kesetimbangan merupakan titik dimana penyakit dinyatakan mengalami kesetimbangan menjadi bebas penyakit atau menjadi endemik di suatu wilayah. Titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik pada persamaan (3.1) dapat ditentukan dengan melakukan perhitungan pada

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dL}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0. \quad (3.2)$$

Diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \Lambda + \pi_1 - (\beta I + \tau + \mu)S &= 0, \\ \pi_2 L + \beta SI - (\epsilon + \mu)L &= 0, \\ \epsilon L - (\gamma + \mu)I &= 0, \\ \gamma I + \tau S - \mu R &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah kondisi dimana tidak terdapat individu yang terinfeksi Omicron pada suatu populasi, yaitu saat  $E = I = 0$ . Dengan menyelesaikan persamaan (3.3) diperoleh:

$$E_0 = (S, L, I, R) = \left( \frac{\Lambda + \pi_1}{\tau + \mu}, 0, 0, \frac{\tau(\Lambda + \pi_1)}{\mu(\tau + \mu)} \right). \quad (3.4)$$

Selanjutnya, titik Kesetimbangan Endemik adalah kondisi dimana terdapat banyak jumlah individu yang terinfeksi Omicron pada suatu populasi. Sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik model SLIR adalah  $E_1 = (S^*, L^*, I^*, R^*)$ , dengan

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{k_1 k_2 - \pi_2 k_2}{\beta} = \frac{(\epsilon + \mu)(\gamma + \mu) - \pi_2(\gamma + \mu)}{\beta}, \\ L^* &= \frac{k_2(\Lambda + \pi_1)}{\epsilon} - \frac{k_2(\tau + \mu)}{\epsilon\beta}, \\ I^* &= (\Lambda + \pi_1) - \frac{(\tau + \mu)}{\beta}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$R^* = \frac{h}{\mu\beta}, \quad (3.6)$$

dimana  $h = \beta\gamma(\Lambda + \pi_1) - \gamma(\tau + \mu) + \tau(\epsilon + \mu) - \tau\pi_2(\gamma + \mu)$ . Linierisasi ini dilakukan dengan mendekati model menggunakan deret Taylor di sekitar titik tetap  $\left( \frac{\Lambda + \pi_1}{\tau + \mu}, 0, 0, \frac{\tau(\Lambda + \pi_1)}{\mu(\tau + \mu)} \right)$  dan  $(S^*, L^*, I^*, R^*)$ . Sehingga bentuk model yang telah didapatkan diubah menjadi  $f_1 = \frac{dS}{dt}, f_2 = \frac{dL}{dt}, f_3 = \frac{dI}{dt}, f_4 = \frac{dR}{dt}$  sehingga persamaan (3.1) menjadi

$$\begin{aligned} f_1 &= \Lambda + \pi_1 - (\beta I + \tau + \mu)S = 0, \\ f_2 &= \pi_2 L + \beta SI - (\epsilon + \mu)L = 0, \\ f_3 &= \epsilon L - (\gamma + \mu)I = 0, \\ f_4 &= \gamma I + \tau S - \mu R = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Matriks Jacobi pada sistem dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - \tau - \mu & 0 & -\beta S & 0 \\ \beta I & \pi_2 - k_1 & \beta S & 0 \\ 0 & \epsilon & -k_2 & 0 \\ \tau & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

### 3.2.1. Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0 = \left( \frac{\Lambda + \pi_1}{\tau + \mu}, 0, 0, \frac{\tau(\Lambda + \pi_1)}{\mu(\tau + \mu)} \right)$  yang disubstitusikan pada matriks Jacobian di persamaan (3.8) sehingga didapatkan:

$$J = \begin{bmatrix} -\tau - \mu & 0 & -\beta \frac{(\Lambda + \pi_1)}{(\tau + \mu)} & 0 \\ 0 & \pi_2 - k_1 & \beta \frac{(\Lambda + \pi_1)}{(\tau + \mu)} & 0 \\ 0 & \epsilon & -k_2 & 0 \\ \tau & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian (3.9), yaitu dengan menghitung  $|\lambda I - J^*| = 0$ :

$$\begin{vmatrix} \lambda + (\tau + \mu) & 0 & -\beta \frac{(\Lambda + \pi_1)}{(\tau + \mu)} & 0 \\ 0 & \lambda - (\pi_2 - k_1) - \beta \frac{(\Lambda + \pi_1)}{(\tau + \mu)} & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon & \lambda + k_2 & 0 \\ -\tau & 0 & -\gamma & \lambda + \mu \end{vmatrix} = 0. \quad (3.10)$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor, maka determinan yang diperoleh berdasarkan persamaan (3.10) adalah sebagai berikut. Tuliskan  $p = \frac{(\Lambda + \pi_1)}{(\tau + \mu)}$ .

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)[(\lambda - \pi_2 + k_1)(\lambda + k_2)(\lambda + \tau + \mu) - (\lambda + \tau + \mu)\epsilon p] &= 0, \\ \iff (\lambda + \mu)(\lambda + \tau + \mu)[(\lambda - \pi_2 + k_1)(\lambda + k_2) - \epsilon p] &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Maka dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu < 0, \\ \lambda_2 &= -(\tau + \mu) < 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Berlaku juga pada bagian akhir dari persamaan (3.11) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (\lambda - \pi_2 + k_1)(\lambda + k_2) - \epsilon p &= 0, \\ \iff \lambda^2 + (-\pi_2 + k_1 + k_2)\lambda + (-\pi_2 k_2 + k_1 k_2 - \epsilon p) &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

berdasarkan (3.13), jika diambil pemisalan  $b = -\pi_2 + k_1 + k_2$  dan  $c = -\pi_2 k_2 + k_1 k_2 - \epsilon p$ , maka diperoleh:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (3.14)$$

sedemikian hingga dapat diperoleh nilai eigen ke-tiga dan ke-empat yaitu:

$$\lambda_{3,4} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (3.15)$$

Berdasarkan (3.15) dapat diperoleh:

$$\lambda_{3,4} = -\frac{(-\pi_2 + k_1 + k_2) \pm \sqrt{(-\pi_2 + k_1 + k_2)^2 - 4(-\pi_2 k_2 + k_1 k_2 - \epsilon p)}}{2}. \quad (3.16)$$

Maka dari persamaan (3.16) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{-(-\pi_2 + k_1 + k_2) + \sqrt{(-\pi_2 + k_1 + k_2)^2 - 4(-\pi_2 k_2 + k_1 k_2 - \epsilon p)}}{2}, \\ \lambda_4 &= \frac{-(-\pi_2 + k_1 + k_2) - \sqrt{(-\pi_2 + k_1 + k_2)^2 - 4(-\pi_2 k_2 + k_1 k_2 - \epsilon p)}}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Selanjutnya nilai eigen ke-tiga dan ke-empat memiliki beberapa kemungkinan sehingga sifat kestabilan pada sistem dapat berganti. Pada persamaan (3.17) dalam hal ini berlaku:

**Kasus 1.** Jika diambil  $(-\pi_2 + k_1 + k_2)^2 - 4(-\pi_2 k_2 + k_1 k_2 - \epsilon p) < 0$ .

Agar sistem stabil maka nilai eigen ke-tiga dan ke-empat harus bernilai kurang dari nol, maka diperoleh  $(-\pi_2 + k_1 + k_2)^2 < 4(-\pi_2 k_2 + k_1 k_2 - \epsilon p)$ . Sistem akan stabil jika  $Re(\lambda_{3,4} < 0)$ . Selanjutnya dapat diketahui bahwa pengambilan  $(-\pi_2 + k_1 + k_2)^2 - 4(-\pi_2 k_2 + k_1 k_2 - \epsilon p) < 0$  dengan  $b > 0$  dan  $c > 0$  menjelaskan bahwa  $Re(\lambda_3 < 0)$  dan  $Re(\lambda_4 < 0)$  dengan  $(-\pi_2 + k_1 + k_2) > 0$  sedemikian hingga  $k_1 + k_2 > \pi_2$  Jadi pada sistem berada pada kondisi stabil.

**Kasus 2.** Jika  $(-\pi_2 + k_1 + k_2)^2 - 4(-\pi_2 k_2 + k_1 k_2 - \epsilon p) \geq 0$ .

Agar sistem stabil maka nilai eigen ke-tiga dan ke-empat harus bernilai kurang dari nol. Oleh karena itu, pada kasus ini jelas bahwa  $(-\pi_2 + k_1 + k_2) > 0 \iff k_1 + k_2 > \pi_2$  sedemikian sehingga diperoleh:  $(-\pi_2 + k_1 + k_2)^2 \geq 4(-\pi_2 k_2 + k_1 k_2 - \epsilon p)$ . Sehingga nilai dalam akar diperoleh  $(\pi_2 + k_2 - k_1)^2 \geq -4\epsilon p$ .

Berdasarkan dua kasus tersebut, dapat diperoleh bahwa nilai  $\pi_2 + k_2 - k_1 > 0$  sehingga berlaku  $k_1 - k_2 < \pi_2$ . Dalam hal ini berlaku juga  $k_1 + k_2 > \pi_2$ , maka dapat diperoleh:

$$k_1 - k_2 < \pi_2 < k_1 + k_2. \quad (3.18)$$

Berdasarkan ketentuan tersebut jelas hal ini menyebabkan  $Re(\lambda_3) < 0$  dan  $Re(\lambda_4) < 0$ . Jadi pada sistem berada pada kondisi stabil. Dengan demikian dapat disimpulkan  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ , dan  $\lambda_4 < 0$ . Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  stabil asimtotik.

### 3.2.2. Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Kesetimbangan Endemik $E_1$

Titik kesetimbangan endemik  $E_1 = (S^*, L^*, I^*, R^*)$  disubstitusikan pada matriks Jacobian (3.8) sehingga didapat persamaan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I^* - \tau - \mu & 0 & -\beta S^* & 0 \\ \beta I^* & \pi_2 - k_1 & \beta S^* & 0 \\ 0 & \epsilon & -k_2 & 0 \\ \tau & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian, yaitu dengan menghitung  $|\lambda I - J^*| = 0$ .

$$\begin{bmatrix} -\beta I^* - \tau - \mu & 0 & -\beta S^* & 0 \\ \beta I^* & \pi_2 - k_1 & \beta S^* & 0 \\ 0 & \epsilon & -k_2 & 0 \\ \tau & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} = 0. \quad (3.20)$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor pada baris ke-1, diperoleh:

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu)((\lambda + \beta I^* + \tau + \mu)(\lambda - \pi_2 + k_1)(\lambda + k_2)) \\ & - (\lambda + \beta I^* + \tau + \mu)(\epsilon \beta S^*) + \beta I^*(\epsilon \beta S^*) = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dari persamaan (3.21) didapat nilai  $\lambda$ , yaitu

$$\lambda_1 = -\mu. \quad (3.22)$$

Berdasarkan nilai eigen yang pertama, yaitu  $\lambda_1 = -\mu$ , dapat diamati bahwa nilai eigen tersebut bernilai negatif karena  $\mu > 0$ . Berdasarkan (3.21) juga dapat diperoleh

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \quad (3.23)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= k_1 + k_2 + \pi_2 + \tau + \mu + \beta I^*, \\ a_2 &= [(k_1(k_2 + \beta I^* + \mu) + k_2(\beta I^* + \tau + \mu) - \pi_2(k_1 + k_2 + \beta I^* + \tau + \mu) - \beta S^* \epsilon)] \\ a_3 &= k_2(-\beta I^* \pi_2 + \beta I^* k_1 - \tau \pi_2 + \tau k_1 + \mu k_1) - \mu \pi_2 k_1 - \beta S^* \epsilon(\tau + \mu). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Berdasarkan Kriteria Routh Hurwit, dimana akar-akar persamaan karakteristik memiliki bagian riil negatif jika memenuhi beberapa kriteria, yaitu  $a_1 > 0, a_3 > 0$ , dan  $a_1 a_2 > a_3$ , maka diperoleh:

$$\begin{aligned} & [(k_1 + k_2 + \pi_2 + \tau + \mu + \beta I^*)((k_1(k_2 + \beta I^* + \mu) + k_2(\beta I^* + \tau + \mu) \\ & - \pi_2(k_1 + k_2 + \beta I^* + \tau + \mu) - \beta S^* \epsilon) \\ & > k_2(-\beta I^* \pi_2 + \beta I^* k_1 - \tau \pi_2 + \tau k_1 + \mu k_1) - \mu \pi_2 k_1 - \beta S^* \epsilon(\tau + \mu), \end{aligned} \quad (3.26)$$

agar sistem stabil di titik tetap  $E_1$  asimtotik dikarenakan sistem mempunyai akar-akar dengan nilai riil negatif.

### 3.3. Model Penyebaran Covid Varian Omicron Dengan Kontrol

Model penyebaran Covid Varian Omicron yang telah terbentuk akan dikonstruksi kembali dengan menambahkan variabel kontrol berupa pemberian vaksin. Dengan  $u$  pada [6] dinyatakan sebagai kontrol dengan pemberian vaksin. Oleh karena itu bentuk kontruksi model didapatkan sebagaimana berikut

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda + \pi_1 - (\beta I + u + \mu)S, \\ L' &= \pi_2 L + \beta SI - (\epsilon + \mu)L, \\ I' &= \epsilon L - (\gamma + \mu)I, \\ R' &= \gamma I + uS - \mu R \end{aligned} \quad (3.27)$$

Pada persamaan diatas,  $u(t)$  merupakan rata-rata pemberian vaksin, dimana  $S(t)$  menyatakan jumlah keberhasilan individu yang telah diberikan vaksin pada setiap waktu  $t$ . Demikian optimal kontrol pada model dapat diperoleh dengan meminimalisasi fungsional objektif berdasarkan [13], yaitu:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^{t_f} A_0 S(t) + \frac{B}{2} u^2(t) dt, \quad (3.28)$$

dengan  $0 \leq u(t) \leq u_{\max}$  dan  $t \in [0, t_f]$ . Adapun  $B$  merupakan koefisien bobot harga dari proses pemberian vaksin dan  $t_f$  merupakan waktu dalam menjalani proses vaksin. Sehingga diperoleh bentuk Lagrangian berdasarkan [15] sebagai berikut.

$$\mathcal{L}(S, u) = A_0 S(t) + \frac{B}{2} u^2(t), \quad (3.29)$$

dimana bentuk Hamiltonian berdasarkan bentuk Lagrange, dan sistem berdasarkan persamaan 2.9 didapatkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & A_0 S(t) + \frac{B}{2} u^2(t) + \lambda_1 (\Lambda + \pi_1 - (\beta I + u + \mu)S) + \lambda_2 (\pi_2 L + \beta S I - (\epsilon + \mu)L) \\ & + \lambda_3 (\epsilon L - (\gamma + \mu)I) + \lambda_4 (\gamma I + uS - \mu R), \end{aligned} \quad (3.30)$$

dengan kondisi batas  $\lambda_i(t_f) = 0$  untuk  $i = 1, 2, 3, 4$ . Nilai kontrol optimal  $u^*(t)$  dapat diselesaikan berdasarkan persamaan (3.30), sedemikian hingga diperoleh:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \iff u^* = \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)S^*}{B}. \quad (3.31)$$

Karena nilai  $0 \leq u \leq u_{\max}$  maka diperoleh nilai kontrol optimal  $u^*$ . Berdasarkan [13], dapat dinyatakan nilai optimal  $u^*$  sebagai berikut.

$$u^* = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)S^*}{B} \right\}, u_{\max} \right\} \quad (3.32)$$

Berdasarkan Hamiltonian yang telah diperoleh pada persamaan (3.30), dapat ditentukan persamaan *state* dan *costate*. Persamaan *state* dari Hamiltonian pada persamaan (3.28) tersebut diperoleh:

$$\begin{aligned} S' &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_1} = \Lambda + \pi_1 - (\beta I(t) + u(t) + \mu)S(t), \\ L' &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_2} = \pi_2 L(t) + \beta S(t)I(t) - (\epsilon + \mu)L(t), \\ I' &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_3} = \epsilon L(t) - (\gamma + \mu)I(t), \\ R' &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_4} = \gamma I(t) + uS(t) - \mu R(t). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Selanjutnya diperoleh persamaan *costate* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1^* &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = -A_0 + (\lambda_1 - \lambda_2)\beta I + (\lambda_1 - \lambda_4)u^* + \lambda_1 \mu, \\ \dot{\lambda}_2^* &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L} = -\lambda_2 \pi_2 + (\lambda_2 - \lambda_3)\epsilon + \lambda_2 \mu, \\ \dot{\lambda}_3^* &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = (\lambda_3 - \lambda_4)\gamma + \lambda_3 \mu, \\ \dot{\lambda}_4^* &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} = \lambda_4 \mu, \end{aligned} \quad (3.34)$$

dengan kondisi batas  $S(0) = S_0, L(0) = L_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0, \lambda_1(t_f) = 0, \lambda_2(t_f) = 0, \lambda_3(t_f) = 0, \text{ dan } \lambda_4(t_f) = 0$ .

### 3.4. Simulasi Numerik

Pada penelitian ini diperoleh model penyebaran Covid varian Omicron dengan bentuk persamaan diferensial nonlinear. Sistem diferensial tersebut diselesaikan secara numerik dengan metode Runge-Kutta orde empat, dan dilakukan secara maju berdasarkan waktu untuk menyelesaikan persamaan *state*. Langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan *costate* yang dilakukan secara mundur terhadap waktu, dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 berdasarkan kondisi transversal. Nilai-nilai yang diperoleh dari persamaan *state* dan *costate* digunakan untuk memberikan nilai baru pada kontrol  $u$  yang telah ditetapkan. Proses kontrol yang digunakan dalam model ini menggunakan program vaksinasi yang diberikan kepada individu rentan (*susceptible*), dimana setelah diberikan vaksinasi, maka individu tersebut akan memasuki kelas sembuh (*recovery*) dan tidak akan terinfeksi Covid varian Omicron. Kondisi awal yang diberikan pada pengamatan ini adalah  $S(0) = 0.4, L(0) = 0.2, I(0) = 0.2, \text{ dan } R(0) = 0.1$ .

#### 3.4.1. Simulasi dan Pengamatan Pada Kestabilan Model

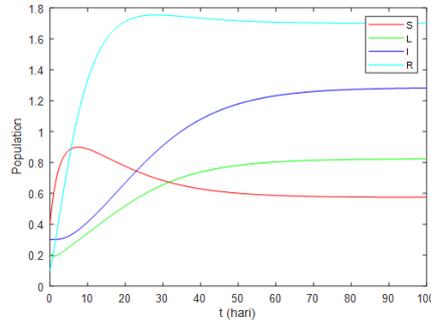
Simulasi pertama yang dilakukan pada kestabilan titik tetap bebas penyakit yang telah diperoleh pada subbab sebelumnya dengan menggunakan nilai-nilai parameter seperti pada Tabel 1. Simulasi dilakukan untuk  $t = 0$  sampai dengan  $t = 100$  dalam satuan hari.

Tabel 1. Daftar Nilai Parameter Simulasi Pertama

Parameter	Nilai	Sumber
$\Lambda$	0.1374	Nasution & Sinaga
$\tau$	0.25	Asumsi
$\mu$	0.0128	Nasution & Sinaga
$\epsilon$	0.279	Nasution & Sinaga
$\gamma$	0.058	Asumsi
$B$	0.3	Asumsi
$\pi_1$	0.3	Asumsi
$\pi_2$	0.15	Asumsi

Berdasarkan Gambar 2, dapat dijelaskan bahwa subpopulasi sembuh mengalami peningkatan dari waktu ke waktu. Hal ini dikarenakan individu rentan yang telah divaksin, sehingga kekebalan tubuhnya meningkat, dan karena adanya individu terinfeksi yang telah sembuh. Subpopulasi terinfeksi mengalami kenaikan pada 40 hari pertama karena adanya individu laten yang telah positif terinfeksi virus Omicron.

Untuk mengamati tingkah laku kontrol pada sistem, maka diberikan perubahan nilai pada parameter-parameter, sehingga keadaan yang tidak stabil diperoleh dengan kondisi awal yang sama seperti sebelumnya.



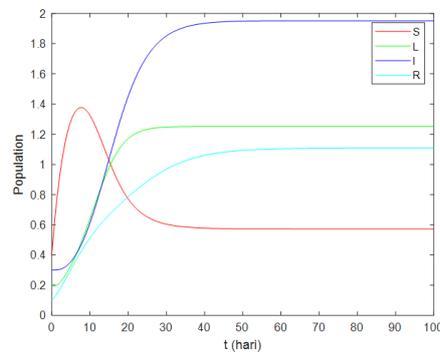
Gambar 2. Hasil Simulasi Sistem yang Stabil

Pada Tabel 2 diberikan daftar nilai parameter yang digunakan untuk simulasi yang kedua.

Tabel 2. Daftar Nilai Parameter Simulasi Kedua

Parameter	Nilai	Sumber
$\Lambda$	0.1374	Nasution & Sinaga
$\tau$	0.05	Asumsi
$\mu$	0.128	Asumsi
$\epsilon$	0.29	Nasution & Sinaga
$\gamma$	0.058	Asumsi
$B$	0.3	Asumsi
$\pi_1$	0.3	Asumsi
$\pi_2$	0.15	Asumsi

Berdasarkan nilai parameter-parameter pada Tabel 2 maka hasil simulasi yang diperoleh dapat dilihat pada Gambar 3.



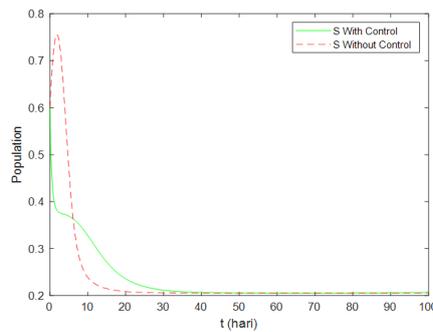
Gambar 3. Hasil Simulasi Pada Sistem yang Tidak Stabil

Dari Gambar 3 dapat dilihat bahwa model penyebaran Covid varian Omi-

cron bersifat tidak stabil. Hal ini dikarenakan subpopulasi terinfeksi (*infected*) mengalami kenaikan yang sangat pesat, berbanding terbalik dengan kenaikan subpopulasi sembuh (*recovery*) yang terlihat lebih sedikit dibandingkan dengan subpopulasi terinfeksi, sedemikian sehingga penyebaran Covid varian Omicron tidak dapat dikendalikan.

### 3.4.2. Simulasi Dengan Penambahan Optimal Kontrol Pada Model

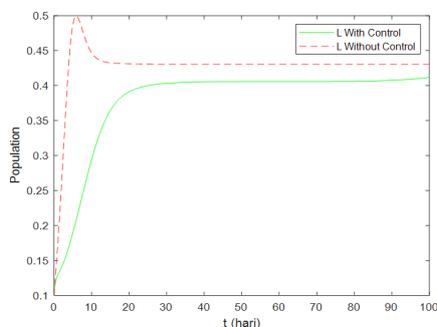
Pada simulasi ini nilai-nilai parameter yang digunakan adalah seperti pada Tabel 2. Pada bagian ini akan diberikan analisis atas hasil yang berbeda pada sistem yang menggunakan optimal kontrol dengan tanpa menggunakan optimal kontrol. Pada Gambar 4 diberikan perbedaan hasil simulasi pada setiap subpopulasi sebelum dan sesudah dikontrol.



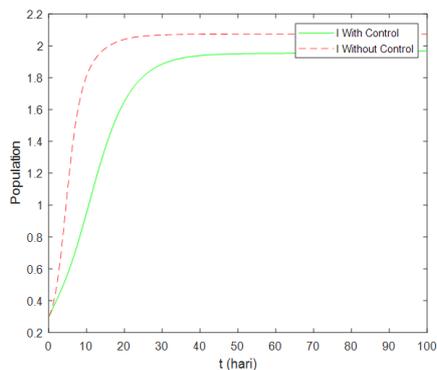
Gambar 4. Populasi Susceptible Dengan dan Tanpa Kontrol

Dari Gambar 4 dapat diamati bahwa rata-rata jumlah individu rentan yang dikontrol selama 30 hari, jumlah individu rentan yang diberikan kontrol tidak mengalami kenaikan dan mengalami penurunan daripada yang tidak diberikan kontrol. Hal ini disebabkan terdapat individu *susceptible* yang diberikan vaksin sehingga kebal terhadap penyakit dan masuk kedalam subpopulasi *recovery*. Kemudian setelah 40 hari, jumlah individu rentan yang dikontrol tidak mengalami penurunan dan kenaikan, sehingga berada dalam keadaan stabil dan menyebabkan peluang terjadinya kontak antara individu rentan dan terinfeksi semakin sedikit.

Selanjutnya, dari Gambar 5 dapat diamati bahwa jumlah individu laten sebelum diberikan kontrol mengalami kenaikan di 7 hari awal. Hal ini dikarenakan adanya individu rentan yang belum diberikan vaksin melakukan kontak dengan individu terinfeksi sehingga dapat tertular penyakit. Untuk jumlah individu laten yang telah diberikan kontrol, lebih sedikit mengalami kenaikan di awal 20 hari, dikarenakan pemberian vaksin mengakibatkan kekebalan terhadap penyakit. Setelah 20 hari, jumlah individu laten tidak lagi mengalami kenaikan dan penurunan, sehingga berada dalam keadaan stabil. Hal tersebut mengakibatkan peluang terjadinya kontak antara individu rentan dan terinfeksi semakin berkurang dan jumlah individu yang positif Covid Omicron berkurang serta dapat dikendalikan.



Gambar 5. Populasi Latent Dengan dan Tanpa Kontrol



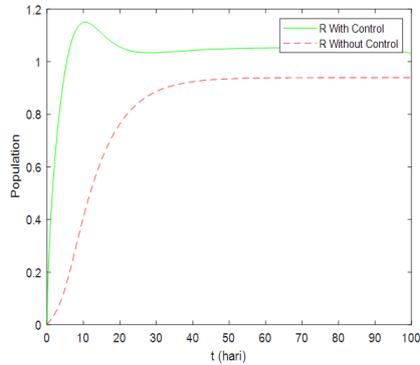
Gambar 6. Populasi Terinfeksi Dengan dan Tanpa Kontrol

Dari Gambar 6 didapatkan hasil simulasi dimana jumlah individu yang terinfeksi mengalami kenaikan yang lebih tinggi selama 20 hari. Hal ini dikarenakan adanya individu laten yang positif terinfeksi penyakit setelah melakukan kontak dengan individu terinfeksi. Jumlah individu terinfeksi yang diberikan kontrol mengalami kenaikan yang sedikit lebih rendah namun hanya mengalami kenaikan di awal 30 hari, selanjutnya tidak mengalami kenaikan dan penurunan, sehingga berada dalam keadaan stabil. Hal ini dikarenakan terdapat individu yang mengalami kesembuhan dan masuk ke subpopulasi *recovery* seperti terlihat pada gambar 7.

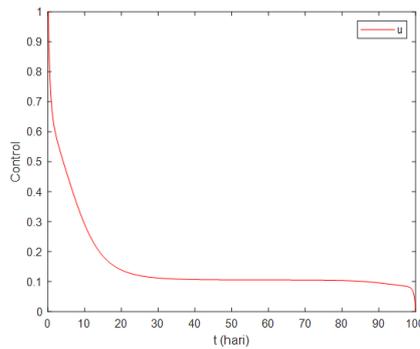
Dari Gambar 7 dapat dilihat bahwa jumlah individu *recovery* sebelum dikontrol lebih sedikit. Jumlah individu *recovery* dengan penambahan kontrol memiliki jumlah lebih banyak, dikarenakan jumlah individu yang berada di subpopulasi terinfeksi mengalami kesembuhan sehingga penyebaran penyakit dalam dikendalikan.

Dari Gambar 8 dapat diamati bahwa dalam upaya pengendalian penyebaran Covid varian Omicron, proses vaksinasi selama 20 hari dilakukan secara maksimal. Kemudian setelah 20 hari, penyebaran penyakit mulai berkurang dan stabil, sehingga pemberian vaksin yang dilakukan berkurang sedikit demi sedikit berdasarkan keadaan tersebut selama 100 hari.

Dapat disimpulkan bahwa dengan adanya kontrol optimal dengan proses pence-



Gambar 7. Populasi *Recovery* Dengan dan Tanpa Kontrol



Gambar 8. Kontrol Optimal  $u$  pada Penyebaran Covid Varian Omicron

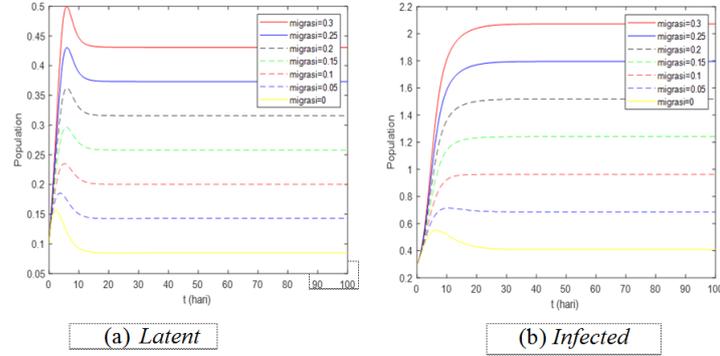
gahan berupa vaksinasi, jika proses tersebut dapat dilakukan secara masif setidaknya selama 100 hari pertama, maka jumlah individu terinfeksi dapat dikendalikan dengan baik dan dapat meminimalkan biaya dalam pemberian kontrol tersebut. Selain itu upaya penambahan kontrol vaksinasi dapat melindungi dan memperkuat sistem kekebalan tubuh, hingga menjaga produktivitas dan meminimalkan dampak sosial dan ekonomi yang terjadi.

3.4.3. *Simulasi Pengaruh Parameter Migrasi Terhadap Individu Latent dan Infected*

Pada simulasi ini, nilai parameter-parameter yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$\Lambda = 0.1, \beta = 0.879, \pi_2 = 0.1553, \tau = 0, \mu = 0.128, \epsilon = 0.895, \gamma = 0.058, u_{\max} = 1.$$

Grafik pada Gambar 9 menunjukkan pengaruh parameter migrasi ( $\pi_1$ ) terhadap jumlah populasi pada subpopulasi *Latent* dan *Infected* dengan adanya Kontrol Optimal. Dalam hal ini, nilai parameter migrasi ditingkatkan sebesar  $0 \leq \pi_1 \leq 0.3$ . Penjelasannya adalah sebagai berikut.



Gambar 9. Pengaruh Parameter Migrasi terhadap Jumlah Individu (a) *Latent* dan (b) *Infected*

- (a) Pada subpopulasi laten, pengurangan parameter migrasi ( $\pi_1$ ) berpengaruh negatif terhadap jumlah individu laten. Dapat dilihat pada Gambar 9(a), bahwa dengan adanya kontrol dan jumlah parameter migrasi yang semakin diturunkan, maka jumlah individu laten semakin berkurang. Artinya, kontrol tetap harus dilakukan pada individu rentan agar jumlah penyebaran penyakit dapat berkurang. Dapat disimpulkan bahwa jumlah orang yang bermigrasi harus dikurangi sebanyak mungkin, sehingga penyebaran penyakit dapat berkurang dan dampak dari penyebaran penyakit dapat diatasi dengan baik.
- (b) Pada subpopulasi terinfeksi, pengurangan parameter migrasi ( $\pi_1$ ) juga berpengaruh negatif terhadap jumlah individu terinfeksi. Dari poin (a), jumlah individu yang melakukan kontak dan positif terinfeksi Covid Omicron menurun seiring berkurangnya jumlah individu laten. Sehingga jumlah individu yang masuk ke subpopulasi terinfeksi semakin sedikit, dan penyebaran penyakit dapat dikendalikan dengan baik.

Dapat dilihat bahwa pemberian kontrol disertai penurunan nilai parameter migrasi dapat berpengaruh terhadap subpopulasi laten dan terinfeksi. Pengurangan parameter migrasi yang dilakukan dapat meminimumkan jumlah populasi laten dan terinfeksi penderita Omicron sehingga penyebaran penyakit dapat dikendalikan serta dampak dari penyebaran penyakit dapat diminimalkan dengan baik. Demikian jumlah orang yang melakukan perpindahan dari satu daerah ke daerah lain dapat berkurang. Maka jumlah orang yang bermigrasi harus dibatasi sedemikian hingga jumlah populasi laten dapat berkurang.

#### 4. Kesimpulan

Pada model SLIR penyebaran Covid varian Omicron dengan adanya migrasi dan kontrol vaksinasi, diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu kestabilan pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $\left(\frac{\Lambda+\pi_1}{\tau+\mu}, 0, 0, \frac{\tau(\Lambda+\pi_1)}{\mu(\tau+\mu)}\right)$ , dan titik kesetimbangan endemik  $\left(\frac{(k_1 k_2 - \pi_2 k_2)}{\beta}, \frac{k_2(\Lambda+\pi_1)}{\epsilon} - \frac{k_2(\tau+\mu)}{\epsilon\beta}, \lambda + \pi_1 - \frac{\tau+\mu}{\beta}, \frac{h}{\mu\beta}\right)$ .

Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil saat  $k_1 - k_2 < \pi_2 < k_1 + k_2$ . Sementara titik kesetimbangan endemik akan stabil saat

$$\begin{aligned} & [(k_1 + k_2 + \pi_2 + \tau + \mu + \beta I^*)((k_1(k_2 + \beta I^* + \mu) + k_2(\beta I^* + \tau + \mu) \\ & \quad - \pi_2(k_1 + k_2 + \beta I^* + \tau + \mu) - \beta S^* \epsilon) \\ & \quad > k_2(-\beta I^* \pi_2 + \beta I^* k_1 - \tau \pi_2 + \tau k_1 + \mu k_1) - \mu \pi_2 k_1 - \beta S^* \epsilon(\tau + \mu). \end{aligned}$$

Pemberian kontrol berupa vaksinasi  $u$  yang diberikan kepada subpopulasi rentan (*susceptible*) disertai pengurangan kontrol dan parameter migrasi dapat berpengaruh terhadap subpopulasi laten dan terinfeksi. Pemberian kontrol dan pengurangan parameter migrasi yang dilakukan dapat meminimumkan jumlah populasi laten dan terinfeksi. Hal ini disebabkan adanya pengurangan jumlah individu yang berpindah dari satu tempat ke tempat lain akibat adanya pengurangan parameter migrasi pada individu penderita Omicron, sehingga menyebabkan kondisi pada tiap populasi stabil. Hal ini berakibat penyebaran Omicron dapat dikendalikan serta dampak dari penyebaran penyakit dapat diminimalkan dengan baik.

## 5. Ucapan Terima kasih

Ucapan terimakasih disampaikan kepada pihak-pihak terkait yang telah membantu dalam menyelesaikan penelitian ini.

## Daftar Pustaka

- [1] Amalia, H., 2021, Omicron penyebab Covid-19 sebagai variant of concern, *Jurnal Biomedika dan Kesehatan* Vol. **4**(4): 139 – 141
- [2] Asyabah, Z., Waluya, S.B., Kharis, M., 2018, Pemodelan SIR untuk penyebaran Penyakit Pertusis dengan Vaksinasi pada populasi Manusia Konstan, *Unnes J. Math.*, Vol. **7**(1): 96 – 107
- [3] de Queljoe, J. F., Rumlawang, F., Sinay, L.J., 2020, Analisis kestabilan terhadap penyebaran penyakit flu burung (avian influenza), *Parameter Jurnal Matematika, Statistika dan Terapannya* Vol. **1**(1): 45 – 59
- [4] Desi, F.N., Noviani, E., Yudhi, 2021, Kontrol Optimal Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin Pada Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis Di Kalimantan Barat, *Jurnal Matematika UNAND* Vol. **10**(3): 236 – 247
- [5] Jannah, M., Karim, M.A., Yulida, Y., 2021, Analisis Kestabilan Model SEIR Untuk Penyebaran Covid-19 Dengan Parameter Vaksinasi, *Barekeng J. Ilmu Mat. dan Terap.* Vol. **15**(3): 535 – 542
- [6] Khoerunnisa, K., Adi, Y.A., 2021, Masalah Kontrol Optimal Pada Penyebaran Covid-19 di Jawa Tengah dengan Vaksinasi, *Jurnal Matematika UNAND* Vol. **10**(4): 538 – 552
- [7] Mujiyanti, 2019, Pemodelan Penyakit *Middle East Respiratory Syndrome Corona Virus* (Mers-CoV) dengan Matematika Penyebaran Penggunaan Masker Kesehatan dan Vaksinasi, *Skripsi*, tidak diterbitkan, Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Syarif Hidayatullah
- [8] Nuha, A.R., Achmad, N., Supu, N., 2021, Analisis Model Matematika Penyebaran COVIS-19 Dengan Intervensi Vaksinasi Dan Pengobatan, *Jurnal Matematika UNAND* Vol. **10**(3): 406 – 422

- [9] Pambudi, A. S., Fatmawati, F., Windarto, W., 2020, Analisis Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit Mosaic pada Tanaman Jarak Pagar, *Contemp. Math. Appl.* Vol. **1**(2): 104 – 120
- [10] Putra, R.T., Sukatik, S., Nita, S., 2016, Kestabilan Model Epidemi Seir dengan Matriks Hurwitz, *Poli Rekayasa* Vol. **11**(2): 74 – 82
- [11] Putra, R.T., 2016, Model Epidemi Seir dengan Insidensi Standar, *Poli Rekayasa* Vol. **12**(1): 73 – 81
- [12] Putra, Z.A., Abidin, S.A.Z., 2020, Application of SEIR Model in Covid-19 and The Effect of Lockdown on Reducing The Number of Active Cases, *Indones. J. Sci. Technol.* Vol. **5**(2): 185 – 192
- [13] Rahmadhania, I., Arif, D.K., 2020, Kontrol Optimal pada Model Penyebaran Virus Influenza Tipe A H1N1 dengan Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin, *Limits J. Math. Its Appl.* Vol. 17(1): 67 – 81
- [14] Susilo, A., Jasirwan, C.O.M., Wafa, S. Maria, S., Rajabto, W., Muradi, A., Fachriza, I., Putri, M.Z., Gabriella, S., et al., 2022, Mutasi dan Varian Coronavirus Disease 2019 (Covid-19): Tinjauan Literatur Terkini, *Jurnal Penyakit Dalam* Vol. **9**(1): 59 – 81
- [15] Tomas-Rodriguez, M., Banks, S.P., 2010, *Optimal Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences Vol. **411**, doi: 10.1007/978-1-84996-101-1\_6
- [16] <https://diskes.baliprov.go.id/adaptasi-kebiasaan-baru-di-masa-pandemi-Covid-19/>, Diakses pada 16 Desember 2022
- [17] <https://www.kominfo.go.id/content/detail/32437/masyarakat-dan-pemerintah-bersama-tekanpenularan-Covid-19-lewat-protokol-kesehatan/0/virus.corona>, Diakses pada 16 Desember 2022
- [18] <https://www.alodokter.com/kenali-gejala-orang-terinfeksi-virus-corona-di-minggu-pertama>, Diakses pada 16 Desember 2022.