Jurnal Matematika UNAND
Vol. **3** No. **1** Hal. 1 – 8
ISSN : 2303–291X

SUATU KAJIAN TENTANG PENYARINGAN TERURUT DARI SEMIGRUP IMPLIKATIF

SEPTI MARLENA
Program Studi Magister Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
septimarlena12@yahoo.com

Abstrak. Suatu semigrup implikatif S merupakan suatu himpunan terurut parsial yang bersifat semigrup, semigrup terurut parsial secara negatif (NPO semigrup) dan NPO semigrup komutatif. Definisikan himpunan $S_n(x,y) = \{z \in S | x^n * (y * z) = 1\}$ untuk setiap $x, y \in S$ dan $n \in \mathbb{N}$. Suatu penyaringan terurut merupakan suatu himpunan bagian tak kosong dari S yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Pada tesis ini dikaji penyaringan terurut dari semigrup implikatif, dan hubungannya dengan $S_n(x,y)$ serta diberikan contoh dari semigrup implikatif yang selanjutnya ditentukan penyaringan terurutnya.

Kata Kunci: Semigrup implikatif, NPO semigrup, terurut parsial, penyaringan terurut

1. Pendahuluan

Suatu *semilattice* implikatif merupakan suatu sistem aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan tiga operasi, yaitu operasi terurut parsial, konjungsi dan implikasi.

Pada [4], Nemitz telah mempelajari secara sistematik tentang *semilattice* implikatif. Nemitz memperlihatkan hasil-hasil tertentu dari logika Brouwerian yang dikaji oleh V. Glivenko yang dapat dibuktikan pada *semilattice* implikatif. Kemudian, Nemitz mempelajari hubungan antara homomorfisma pada *semilattice* implikatif dan kernelnya. Selanjutnya, Chan dan Shum pada [1] mengadopsi ide Nemitz dengan memperkenalkan istilah baru yakni *negatively partially ordered* (NPO) semigrup implikatif (semigrup yang terurut parsial secara negatif) dan kemudian mempelajari homomorfisma antara semigrup-semigrup tersebut. Selanjutnya Jun, Meng dan Xin pada [3] memperkenalkan himpunan bagian baru dari semigrup implikatif dengan sifat-sifat tertentu yang disebut dengan penyaringan terurut.

Dalam tulisan ini akan didefinisikan beberapa himpunan bagian tertentu yang dilambangkan dengan $S_n(x,y)$ dari semigrup implikatif, kemudian akan dikaji hubungan antara penyaringan terurut dari semigrup implikatif dengan himpunan-himpunan bagian tertentu tersebut.

2. Himpunan Terurut Parsial

Definisi 2.1. [2] *Jika $(a,b) \in R$ dan R bersifat refleksif, anti simetris dan transitif, maka R disebut relasi terurut parsial.*

3. Semigrup dan semigrup implikatif

Misalkan G suatu himpunan yang tak kosong dan $*$ suatu operasi yang didefinisikan di G. Operasi $*$ disebut operasi biner di G jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a*b \in G$ (G bersifat tertutup terhadap operasi $*$). Suatu G disebut membentuk semigrup terhadap operasi $*$ jika untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$ (G bersifat asosiatif terhadap operasi biner $*$).

Definisi 3.1. [3] *Semigrup terurut parsial secara negatif (NPO semigrup) adalah suatu himpunan S dengan terurut parsial " $\preceq$ " dan suatu operasi biner " $\bullet$ " sedemikian sehingga untuk semua $x, y, z \in S$ berlaku*

(i) $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$.
(ii) Jika $x \preceq y$ maka $x \bullet z \preceq y \bullet z$ dan $z \bullet x \preceq z \bullet y$.
(iii) $x \bullet y \preceq x$ *dan* $x \bullet y \preceq y$.

Definisi 3.2. [3] *Semigrup terurut parsial secara negatif $(S, \preceq, \bullet)$ dikatakan implikatif (NPO semigrup implikatif), jika terdapat operasi biner $* : S \times S \to S$ sehingga untuk setiap elemen x, y, z di S berlaku*

(iv) $z \preceq x * y$ *jika dan hanya jika* $z \bullet x \preceq y$.

Untuk penyederhanaan istilah, NPO semigrup implikatif disebut sebagai semigrup implikatif saja.

Definisi 3.3. [3] *Sebuah semigrup implikatif $(S, \preceq, \bullet, *)$ dikatakan komutatif jika memenuhi*

(v) $x \bullet y = y \bullet x$ *untuk semua $x, y \in S$, artinya $(S, \bullet)$ adalah semigrup komutatif.*

Contoh 3.4. Misalkan $S = \{1, a, b, c, d, 0\}$ dan didefinisikan operasi terurut parsial di S sebagai berikut.

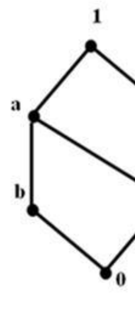
(1) $0 \preceq b \preceq a \preceq 1$.
(2) $0 \preceq d \preceq a \preceq 1$.
(3) $0 \preceq d \preceq c \preceq 1$.

Definisi relasi terurut parsial $\preceq$, dapat juga disajikan diagram Hasse sebagaimana yang diperlihatkan pada Gambar 1.

Tabel 1 dan 2 berikut adalah definisi dari operasi biner $\bullet$ dan $*$ di S yang merupakan semigrup implikatif.

Tabel 1. Definisi operasi $\bullet$ di S

$\bullet$	1	a	b	c	d	0
1	1	a	b	c	d	0
a	a	b	b	d	0	0
b	b	b	b	0	0	0
c	c	d	0	c	d	0
d	d	0	0	d	0	0
0	0	0	0	0	0	0



Gambar 1. Diagram Hasse untuk S = { 1, a, b, c, d, 0 }

Tabel 2. Definisi operasi $*$ di S

$*$	1	a	b	c	d	0
1	1	a	b	c	d	0
a	1	1	a	c	c	d
b	1	1	1	c	c	c
c	1	a	b	1	a	b
d	1	1	a	1	1	a
0	1	1	1	1	1	1

Proposisi 3.5. [*3*] *Misalkan S sebuah semigrup implikatif maka untuk setiap $x, y, z \in S$, berlaku :*

(1) $x \preceq 1$, *dimana* $x * x := 1, x = 1 * x$,
(2) $x \preceq y * (x \bullet y)$,
(3) $x \preceq x * x^2$,
(4) $x \preceq y * x$,
(5) jika $x \preceq y$ *maka* $x * z \succeq y * z$ *dan* $z * x \preceq z * y$,
(6) $x \preceq y$ *jika dan hanya jika* $x * y = 1$,
(7) $x * (y * z) = (x \bullet y) * z$,
(8) jika S adalah komutatif maka $x * y \preceq (s \bullet x) * (s \bullet y)$ *untuk semua s dalam S.*

Sekarang perhatikan sifat dasar dari suatu semigrup implikatif komutatif, yang mengikuti Definisi 3.2(v) dan Proposisi 3.5(1) dan Proposisi 3.5(7).

Proposisi 3.6. [*3*] *Jika S adalah suatu semigrup implikatif komutatif, maka untuk setiap $x, y, z \in S$, berlaku*

(a) $x * (y * z) = y * (x * z)$,
(b) $y * z \preceq (x * y) * (x * z)$,
(c) $x \preceq (x * y) * y$.

4. Penyaringan terurut dari semigrup implikatif

Misalkan S adalah suatu semigrup implikatif. Dalam bagian ini diberikan definisi dan proposisi tentang penyaringan terurut dari S, dan hasil-hasil utama tentang penyaringan terurut dari S.

Definisi 4.1. [3] *Misalkan F suatu himpunan bagian tak kosong dari S. Maka F disebut penyaringan terurut dari S jika*

(F1) $x \bullet y \in F$ *untuk setiap* $x, y \in F$, *artinya adalah bahwa* F *suatu subsemigrup dari* S.
(F2) Jika $x \in F$ *dan* $x \preceq y$, *maka* $y \in F$.

Proposisi 4.2. [3] *Suatu himpunan bagian tak kosong F di S adalah suatu penyaringan terurut jika dan hanya jika berlaku:*

(F3) $1 \in F$
(F4) $x * y \in F$ *dan* $x \in F$ *berakibat* $y \in F$.

Bukti. ($\Rightarrow$) Pertama dibuktikan ($F3$). Andaikan F adalah suatu penyaringan terurut di S. Berdasarkan Proposisi 3.5(1), $x \preceq 1 \forall\ x \in S$ dan berdasarkan ($F2$) diperoleh $1 \in F$.

Berikut akan dibuktikan ($F4$). Untuk setiap $x, y \in S$, diketahui bahwa $x * y \preceq x * y$ (sifat refleksif). Dengan menggunakan Definisi 3.2(iv), maka $(x * y) \bullet x \preceq y$. Misal $x * y \in F$ dan $x \in F$. Berdasarkan ($F1$), diketahui bahwa $(x * y) \bullet x \in F$. Berdasarkan ($F2$), maka $y \in F$. Jadi, terbukti bahwa jika $x * y \in F$ dan $x \in F$ berakibat $y \in F$.

($\Leftarrow$) Berikut ini akan dibuktikan ($F2$). Misal F memenuhi ($F3$) dan ($F4$). Jika $x \in F$ dan $x \preceq y$, maka dengan menggunakan Proposisi 3.5(6) diperoleh $x * y = 1 \in F$. Dari ($F4$), maka $y \in F$. Oleh karena itu F bersifat jika $x \in F$ dan $x \preceq y$, maka $y \in F$. Jadi ($F2$) terbukti.

Selanjutnya akan dibuktikan ($F1$). Misal $x, y \in F$ dan berdasarkan Proposisi 3.5(2) diperoleh $y * (x \bullet y) \in F$. Berdasarkan ($F4$) maka diperoleh $x \bullet y \in F$. Jadi, ($F1$) terbukti.

Diperoleh bahwa F adalah suatu penyaringan terurut. □

Pada bagian ini akan dikaji mengenai pembuktian proposisi dan teorema yang berkaitan dengan penyaringan terurut dari semigrup implikatif.

Proposisi 4.3. [3] *Jika S adalah komutatif, maka $x \in S_n(x, y)$ untuk setiap $x, y \in S$ dan $n \in \mathbb{N}$.*

Bukti. Untuk sebarang $x, y \in S$ dan $n \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\begin{aligned}
x^n * (y * x) &= x^{n-1} * (x * (y * x)),\\
&= x^{n-1} * ((x \bullet y) * x), \text{(Proposisi 3.5(7))},\\
&= x^{n-1} * ((y \bullet x) * x), \text{(Definisi 3.3}(v)),\\
&= x^{n-1} * (y * (x * x)), \text{(Proposisi 3.5(7))},\\
&= x^{n-1} * (y * 1),\ \text{karena } x * x = 1,\\
&= x^{n-1} * 1, \text{(Proposisi 3.5(1) dan (6))},\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Jadi $x \in S_n(x, y)$. □

Proposisi 4.4. [3] *Jika* $y \in S$ *bersifat* $y * z = 1$ *untuk setiap* $z \in S$, *maka* $S_n(x, y) = S = S_n(y, x)$ *untuk setiap* $x \in S$ *dan* $n \in \mathbb{N}$.

Bukti. Jika $y \in S$ bersifat $y * z = 1$ untuk setiap $z \in S$, akan ditunjukkan $S_n(x, y) = S = S_n(y, x)$ untuk setiap $x \in S$ dan $n \in \mathbb{N}$.

(1) Akan dibuktikan $S = S_n(x, y)$.
Akan ditunjukkan bahwa $S_n(x, y) \subset S$. Ambil $z \in S_n(x, y)$. Akan dibuktikan $z \in S$. Berdasarkan definisi, $S_n(x, y) := \{z \in S | x^n * (y * z) = 1\}$. Jelas bahwa $z \in S$. Jadi $S_n(x, y) \subset S$.
Akan ditunjukkan bahwa $S \subset S_n(x, y)$. Ambil $z \in S$. Akan dibuktikan $z \in S_n(x, y)$. $S_n(x, y) = x^n * (y * z)$, diketahui $y * z = 1$ maka $x^n * 1 = 1$. Jadi $S \subset S_n(x, y)$. Sehingga karena $S_n(x, y) \subset S$ dan $S \subset S_n(x, y)$, maka $S = S_n(x, y)$.

(2) Akan dibuktikan $S = S_n(y, x)$.
Akan ditunjukkan bahwa $S_n(y, x) \subset S$. Ambil $z \in S_n(y, x)$. Akan dibuktikan $z \in S$. Berdasarkan definisi, $S_n(y, x) := \{z \in S | y^n * (x * z) = 1\}$. Jelas bahwa $z \in S$. Jadi $S_n(y, x) \subset S$.
Akan ditunjukkan bahwa $S \subset S_n(y, x)$. Ambil $z \in S$. Akan dibuktikan $z \in S_n(y, x)$.

$$\begin{aligned} y^n * (x * z) &= y^{n-1} * (y * (x * z)), \\ &= y^{n-1} * (x * (y * z)), \\ &= y^{n-1} * (x * (1)). \end{aligned}$$

Karena diketahui $y * z = 1 = y^{n-1} * 1 = 1$, maka $S \subset S_n(y, x)$. Sehingga karena $S_n(y, x) \subset S$ dan $S \subset S_n(y, x)$, maka $S = S_n(y, x)$.

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa $S(x, y) = S = S(y, x)$. □

Teorema 4.5. [3] *Misalkan* $a \in S$ *dan* $n \in \mathbb{N}$. *Maka* $S_n(1, a)$ *adalah suatu penyaringan terurut di* S *jika dan hanya jika* $a \preceq z$ *bilamana* $a \preceq y$ *dan* $a \preceq y * z$, *untuk setiap* $y, z \in S$.

Bukti. ($\Rightarrow$) Andaikan bahwa $S_n(1, a)$ adalah penyaringan terurut di S. Misal $y, z \in S$, $a \preceq y$ dan $a \preceq y * z$. Maka $1^n * (a * y) = a * y = 1$ dan $1^n * (a * (y * z)) = a * (y * z) = 1$. Berdasarkan definisi $S_n(x, y)$ maka $y \in S_n(1, a)$ dan $y * z \in S_n(1, a)$, mengakibatkan $z \in S_n(1, a)$, artinya $1 = 1^n * (a * z) = a * z$. Ini menunjukkan bahwa $a \preceq z$.
($\Leftarrow$) Sebaliknya, asumsikan bahwa $a \preceq y$ dan $a \preceq y * z$ berakibat $a \preceq z$ untuk setiap y, $z \in S$. Misal u, $v \in S$ sedemikian sehingga $u * v \in S_n(1, a)$ dan $u \in S_n(1, a)$. Maka $1 = 1^n * (a * (u * v)) = a * (u * v)$ dan $1 = 1^n * (a * u) = a * u$. Berdasarkan Proposisi 3.5(6) diperoleh $a \preceq u * v$ dan $a \preceq u$. Ini mengakibatkan $a \preceq v$, sehingga $1 = 1^n * (a * v) = a * v$. Dengan demikian $v \in S_n(1, a)$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $1 \in S_n(1, a)$.
$S_n(x, y) := \{z \in S | x^n * (y * z) = 1\}$.

$S_n(1, a) := \{z \in S | 1^n * (a * z) = 1\}$.
Jadi, $1 \in S_n(1, a)$. Sehingga $S_n(1, a)$ adalah penyaringan terurut di S.

$\square$

Teorema 4.6. [3] *Jika pada S berlaku hukum distributif kiri terhadap operasi "$*$", maka S_n (a,b) adalah penyaringan terurut di S untuk setiap $a,b \in S$ dan $n \in \mathbb{N}$.*

Bukti. Misalkan $x,y \in S$ sehingga $x * y \in S_n$ (a,b) dan $x \in S_n$ (a,b). Menggunakan hukum distributif kiri, sehingga:

$$\begin{aligned} 1 &= a^n * (b * (x * y)) \\ &= a^n * ((b * x) * (b * y)) \\ &= a^{n-1} * ((a * (b * x)) * (a * (b * y))) \\ &= (a^n * (b * x)) * (a^n * (b * y)) \\ &= 1 * (a^n * (b * y)) \\ &= a^n * (b * y) \end{aligned}$$

Jadi $y \in S_n$ (a,b).
Oleh karena itu $S_n(a, b)$ adalah penyaringan terurut di S. $\square$

Teorema 4.7. [3] *Misal F suatu himpunan bagian tak kosong dari suatu semigrup implikatif komutatif S. Maka F adalah penyaringan terurut di S jika dan hanya jika $S_n(a, b) \subseteq F$ untuk setiap $a, b \in F$ dan $n \in \mathbb{N}$.*

Bukti. Asumsikan bahwa F adalah penyaringan terurut di S dan misal $a,b \in F$ dan $n \in \mathbb{N}$. Jika $x \in S_n(a, b)$, maka $a^n * (b * x) = 1 \in F$. Karena $a, b \in F$, dengan menggunakan (F4) kita mempunyai $x \in F$. Sehingga $S_n(a, b) \subseteq F$.
Sebaliknya, andaikan bahwa $S_n(a, b) \subseteq F$ untuk setiap $a, b \in F$ dan $n \in \mathbb{N}$. Catat bahwa $1 \in S_n(a, b) \subseteq F$. Misal $x,y \in S$ sehingga $x * y \in F$ dan $x \in F$. Maka

$$\begin{aligned} x^n * ((x * y) * y) &= x^{n-1} * (x * ((x * y) * y)), \\ &= x^{n-1} * ((x * y) * (x * y)), \\ &= x^{n-1} * 1, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Jadi $y \in S_n(x, x * y) \subseteq F$. Sehingga F adalah penyaringan terurut di S. $\square$

Teorema 4.8. [3] *Jika F adalah penyaringan terurut dari suatu semigrup implikatif komutatif S, maka $F = \cup_{a,b \in F} S_n$ (a,b) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.*

Bukti. Misalkan F suatu penyaringan terurut dan misal $x \in F$. Jelas $x \in S_n$ $(x,1)$, dan sehingga $F \subseteq \cup_{x \in F} S_n(x, 1) \subseteq \cup_{a,b \in F} S_n(a, b)$. Sekarang misalkan $y \in \cup_{a,b \in F} S_n$ (a,b). Lalu terdapat $u,v \in F$ sehingga $y \in S_n$ (u,v). Berdasarkan dari Teorema 3.8 dapat diperoleh bahwa $y \in F$ sehingga $\cup_{a,b \in F} S_n$ $(a,b) \subseteq F$. $\square$

Akibat 4.9. [3] *Jika F adalah penyaringan terurut dari suatu semigrup implikatif komutatif S, maka $F = \cup_{a \in F} S_n(a, 1)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.*

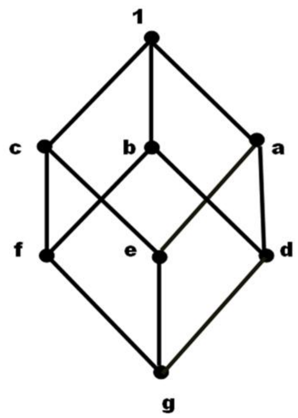
5. Contoh Penyaringan terurut pada semigrup implikatif

Berikut akan diberikan contoh penyaringan terurut yang dapat ditunjukkan dari definisi dan proposisi penyaringan terurut dan dari suatu himpunan bagian S.

Contoh 5.1. Misalkan $S = \{1, a, b, c, d, e, f, g\}$ dan didefinisikan operasi terurut parsial di S sebagai berikut :

(1) $g \preceq f \preceq c \preceq 1$.
(2) $g \preceq f \preceq b \preceq 1$.
(3) $g \preceq e \preceq c \preceq 1$.
(4) $g \preceq e \preceq a \preceq 1$.
(5) $g \preceq d \preceq b \preceq 1$.
(6) $g \preceq d \preceq a \preceq 1$.

Dari definisi relasi terurut parsial $\preceq$, dapat juga disajikan diagram Hasse berikut sebagaimana yang diperlihatkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Diagram Hasse untuk S = { 1, a, b, c, d, e, f, g }.

Tabel 3 dan 4 berikut adalah definisi dari operasi biner $\bullet$ dan $*$ di S.

Tabel 3. Definisi operasi $\bullet$ di S.

$\bullet$	1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	a	b	c	d	e	f	g
a	a	a	d	e	d	e	g	g
b	b	d	b	f	d	g	f	g
c	c	e	f	c	g	e	f	g
d	d	d	d	g	d	g	g	g
e	e	e	g	e	g	e	g	g
f	f	g	f	f	g	g	f	g
g	g	g	g	g	g	g	g	g

Tabel 4. Definisi operasi $*$ di S

$*$	1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	a	b	c	d	e	f	g
a	1	1	b	c	b	c	f	f
b	1	a	1	c	a	e	c	e
c	1	a	b	1	d	a	b	d
d	1	1	1	c	1	c	c	c
e	1	1	b	1	b	1	b	b
f	1	a	1	1	a	a	1	a
g	1	1	1	1	1	1	1	1

Dengan menggunakan definisi dan proposisi penyaringan terurut, maka $F_1 = \{1\}$, $F_2 = \{1, a\}$, $F_3 = \{1, b\}$, $F_4 = \{1, c\}$,$F_5 = \{1, a, b, d\}$, $F_6 = \{1, a, c, e\}$, $F_7 = \{1, b, c, f\}$, $F_8 = S = \{1, a, b, c, d, e, f, g\}$ adalah penyaringan terurut dari S.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Admi Nazra, Bapak I. Made Arnawa, Bapak Muhafzan, Bapak Mahdhivan, Ibu Lyra Yulianti, dan Ibu Yanita yang telah memberikan masukan dan saran sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] M. W. Chan dan K.P. Shum. 1993. Homomorphisms of implicative semigrups, *Semigrup Forum* **46** (1): 7 – 15

[2] Connell. 2002. *Elements of Abstract and Linear Algebra*. Department of Mathematics. University of Miami, USA

[3] Y.B. Jun, Meng, and X. L. Xin. 1997. On ordered filters of implicative semigroups, *Semigroups Forum* **54** (1): 75 – 82

[4] W.C. Nemitz. 1965. Implicative semi-lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.* **117**: 128 – 142