

KESTABILAN MODEL INANG PARASIT NICHOLSON-BAILEY

MIRA OKTAVIANI, ZULAKMAL, MUHAFZAN*

*Departemen Matematika dan Sains Data,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : oktavianim914@gmail.com, zulakmal@sci.unand.ac.id, muhafzan@sci.unand.ac.id*

Diterima 15 Desember 2022 Direvisi 29 Desember 2022 Dipublikasikan 21 Oktober 2023

Abstrak. Dalam makalah ini dikaji kestabilan model Nicholson-Bailey yang merupakan model matematika interaksi antara inang dan parasit. Model Nicholson-Bailey dideskripsikan sebagai suatu sistem persamaan beda non linier diskrit. Dari hasil analisis diperoleh dua titik tetap yang kestabilannya ditentukan oleh tingkat reproduksi inang. Sebagai suatu hasil utama dari penelitian ini diperoleh suatu syarat perlu dan cukup yang menjamin kestabilan asimtotik dari titik tetap model Nicholson-Bailey. Beberapa contoh yang mengilustrasikan hasil diberikan. Grafik tentang perilaku solusi dari model digambarkan dengan bantuan aplikasi Matlab.

Kata Kunci: Model Nicholson-Bailey, Persamaan Beda NonLinier, Kestabilan Titik Tetap

1. Pendahuluan

Inang dan parasit merupakan spesies-spesies yang saling berinteraksi untuk kelangsungan hidupnya masing-masing. Salah satu contoh interaksi dari inang dan parasit ini adalah tawon braconid dan inangnya. Tawon braconid sebagai parasit yang akan menyerang inang, yaitu wereng, kepik, ulat, kutu dan serangga lain. Tawon braconid merupakan salah satu spesies serangga yang bermanfaat dalam pertanian, karena hidup pada inang-inang yang merupakan hama pertanian [1]. Wereng coklat yang merupakan spesies serangga ordo Homoptera adalah suatu contoh dari inang yang menjadi hama pada tanaman padi [2].

Model Nicholson-Bailey merupakan kajian matematika yang mempelajari tentang interaksi antara inang dan parasit [3]. Secara umum, model Nicholson-Bailey diberikan dalam bentuk sistem persamaan beda berikut [4]:

$$\begin{aligned}x(n+1) &= \mu x(n) f(x(n), y(n)) \\y(n+1) &= \ell x(n)[1 - f(x(n), y(n))],\end{aligned}\tag{1.1}$$

dengan $x(n)$ menyatakan jumlah populasi inang dewasa pada musim n , $y(n)$ menyatakan jumlah populasi parasit dewasa pada musim n , dan $\mu > 1$ menyatakan

*Penulis Korespondensi

laju reproduksi inang. Fungsi $f(x(n), y(n))$ adalah fraksi dari larva inang yang tidak terinfeksi parasit. Kemudian, $x(n)[1 - f(x(n), y(n))]$ merupakan kepadatan bersih larva inang yang terinfeksi, dengan setiap larva inang menghasilkan ℓ parasit dewasa pada musim berikutnya [4].

Dewasa ini, beberapa modifikasi model Nicholson-Bailey banyak dijumpai dalam literatur (lihat [5], [6], [7]). Modifikasi model Nicholson-Bailey yang diberikan dalam bentuk sistem persamaan beda berikut:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \frac{Rx(n)}{(1+x(n))^c} e^{-ay(n)} \\ y(n+1) &= x(n)(1 - e^{-ay(n)}), \end{aligned} \tag{1.2}$$

diajukan oleh Ufuktepe dan Kapcak [8]. Pada model (1.2), $\mu = \frac{R}{(1+x(n))^c}$ adalah laju produksi inang, $f(x(n), y(n)) = e^{-ay(n)}$ dan kesuburan parasit (ℓ) didefinisikan 1, a merupakan bilangan positif yang menyatakan tingkat kemampuan parasit untuk mendapatkan inang dan c menyatakan tingkat *feedback* inang dan parasit. Model ini dikaji kembali oleh Khairunnisa dkk. [9]. Qureshi, dkk. [10] mengajukan sistem persamaan beda berikut:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Rx(n) e^{-a\sqrt{y(n)}}, & x(0) &= x_0 \\ y(n+1) &= x(n)(1 - e^{-a\sqrt{y(n)}}), & y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

sebagai modifikasi lain dari model Nicholson-Bailey, dengan $R, a, x_0, y_0 \in \mathbb{R}^+$ dan R menyatakan jumlah keturunan inang yang tidak terkena parasit dan bertahan hidup pada musim berikutnya. Makalah ini mengkaji kembali model Nicholson-Bailey (1.3) dengan melakukan beberapa simulasi.

2. Sistem Persamaan Beda dan Kestabilannya

Sistem persamaan beda adalah suatu sistem persamaan yang bentuk umumnya dapat ditulis sebagai berikut.

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(n)), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{2.1}$$

dengan $\mathbf{y} : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ dan $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Sistem persamaan (2.1) dikatakan linier jika \mathbf{f} linier, dan sebaliknya sistem persamaan (2.1) dikatakan nonlinier [11]. Jika \mathbf{f} linier, sistem (2.1) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\mathbf{y}(n+1) = A\mathbf{y}(n), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \tag{2.2}$$

dengan A adalah suatu matrik $m \times m$. Kestabilan titik tetap merupakan salah satu kajian utama dari sistem persamaan beda. Disebutkan dalam [11] bahwa suatu titik $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^m$ dikatakan titik tetap dari sistem (2.1) jika

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{y}^*. \tag{2.3}$$

Untuk sistem linier, suatu titik \mathbf{y}^* merupakan titik tetap dari sistem (2.2) jika

$$A\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^*, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{2.4}$$

Persamaan (2.4) dapat ditulis dalam bentuk $(I - A)\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$, dengan I adalah matriks identitas $n \times n$. Jika $(I - A)$ non singular, maka $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ adalah satu-satunya titik tetap. Sedangkan jika $(I - A)$ singular, maka terdapat tak hingga banyaknya titik tetap [12].

Definisi 2.1. Misalkan \mathbf{y}^* adalah suatu titik tetap dari sistem (2.1). Titik \mathbf{y}^* dikatakan:

- (1) stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|\mathbf{y}(n_0) - \mathbf{y}^*\| < \delta$ maka $\|\mathbf{y}(n) - \mathbf{y}^*\| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq n_0$,
- (2) stabil asimtotik jika ia stabil dan terdapat δ_1 sedemikian sehingga jika $\|\mathbf{y}(n_0) - \mathbf{y}^*\| < \delta_1$ maka $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(n) - \mathbf{y}^*\| = 0$ [11].

Galor menyatakan bahwa kestabilan titik tetap dari sistem (2.1) dapat diperiksa dengan melinierkan sistem tersebut di sekitar titik tetap \mathbf{y}^* dengan menggunakan ekspansi deret Taylor [13]. Pelinieran sistem (2.1) menghasilkan suatu sistem linier berikut:

$$\mathbf{z}(n+1) = J_{\mathbf{y}^*} \mathbf{z}(n), \quad (2.5)$$

dengan $\mathbf{z}(n) = \mathbf{y}(n) - \mathbf{y}^*$, dan

$$J_{\mathbf{y}^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{y}^*)}{\partial y_1(n)} & \frac{\partial f_1(\mathbf{y}^*)}{\partial y_2(n)} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{y}^*)}{\partial y_m(n)} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{y}^*)}{\partial y_1(n)} & \frac{\partial f_2(\mathbf{y}^*)}{\partial y_2(n)} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{y}^*)}{\partial y_m(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{y}^*)}{\partial y_1(n)} & \frac{\partial f_m(\mathbf{y}^*)}{\partial y_2(n)} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{y}^*)}{\partial y_m(n)} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

adalah matriks Jacobian dari \mathbf{f} di titik tetap \mathbf{y}^* [14].

Definisi 2.2. Misalkan \mathbf{y}^* adalah titik tetap dari sistem persamaan (2.1) dan $J_{\mathbf{y}^*}$ adalah matriks Jacobian dari \mathbf{f} di sekitar titik tetap \mathbf{y}^* . Titik tetap \mathbf{y}^* dikatakan titik tetap hiperbolik jika tidak ada nilai eigen dari matriks $J_{\mathbf{y}^*}$ yang modulusnya 1 [13].

Teorema 2.3. Titik tetap hiperbolik \mathbf{y}^* dari sistem persamaan beda (2.1) adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika modulus dari semua nilai eigen matriks Jacobian $J_{\mathbf{y}^*}$ kurang dari 1 [13].

Teorema berikut ini berguna untuk mendeteksi apakah modulus dari akar suatu persamaan kuadrat kurang dari 1 atau tidak.

Teorema 2.4. [15] Misalkan λ_1 dan λ_2 adalah akar dari persamaan kuadrat

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (2.7)$$

dengan $B, C \in \mathbb{R}$. Syarat perlu dan cukup agar $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$ adalah $|B| < 1 + C < 2$.

3. Pembahasan

Untuk mengetahui perilaku kestabilan model (1.3), perlu ditentukan terlebih dahulu titik tetap dari sistem (1.3). Misalkan (x^*, y^*) adalah titik tetap yang diinginkan, maka berdasarkan syarat (2.3), mestilah berlaku

$$\begin{aligned} x^* &= Rx^* e^{-a\sqrt{y^*}}, \\ y^* &= x^*(1 - e^{-a\sqrt{y^*}}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dari (3.1), jelas bahwa $(x^*, y^*) = (0, 0)$ adalah suatu titik tetap dari sistem (1.3). Selanjutnya, untuk $x^* \neq 0$ dan $y^* \neq 0$ dari sistem persamaan (3.1) diperoleh

$$y^* = \left(\frac{1}{a} \ln(R) \right)^2, \quad (3.2)$$

dan

$$x^* = \frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R) \right)^2. \quad (3.3)$$

Dengan demikian, $(x^*, y^*) = \left(\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R) \right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R) \right)^2 \right)$ merupakan titik tetap lain dari sistem (1.3).

Selanjutnya, dengan menggunakan sistem (2.6), matriks Jacobian dari sistem (1.3) adalah

$$J = \begin{bmatrix} R e^{-a\sqrt{y(n)}} & -\frac{aRx(n) e^{-a\sqrt{y(n)}}}{2\sqrt{y(n)}} \\ 1 - e^{-a\sqrt{y(n)}} & \frac{ax(n) e^{-a\sqrt{y(n)}}}{2\sqrt{y(n)}} \end{bmatrix}.$$

Matriks Jacobian di titik tetap $(0, 0)$ adalah

$$J_0 = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari J_0 adalah

$$\lambda_1 = R \text{ dan } \lambda_2 = 0.$$

Berdasarkan Definisi 2.2, titik $(0, 0)$ adalah titik tetap hiperbolik jika $R \neq 1$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2.3, titik tetap $(0, 0)$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $R < 1$.

Selanjutnya, matriks Jacobian di titik tetap $\left(\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R) \right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R) \right)^2 \right)$ adalah

$$J_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{R \ln(R)}{2(R-1)} \\ \frac{R-1}{R} & \frac{\ln(R)}{2(R-1)} \end{bmatrix}.$$

Polinomial karakteristik $J_{(x^*, y^*)}$ adalah

$$P(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C, \quad (3.4)$$

dengan

$$B = -\left(1 + \frac{\ln(R)}{2(R-1)}\right) \quad \text{dan} \quad C = \frac{R \ln(R)}{2(R-1)}.$$

Nilai eigen dari $J_{(x^*, y^*)}$ adalah akar dari polinomial (3.4), yaitu

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}.$$

Berdasarkan Teorema 2.4, $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$ jika dan hanya jika $|B| < 1 + C < 2$. Dari hubungan ini diperoleh

$$\begin{aligned} |B| < 1 + C &\Leftrightarrow 1 < 1 + \frac{\ln(R)}{2(R-1)} < 1 + \frac{R \ln(R)}{2(R-1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(R)}{2(R-1)} < \frac{R \ln(R)}{2(R-1)} \\ &\Leftrightarrow 1 < R. \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} 1 + C < 2 &\Leftrightarrow \frac{R \ln(R)}{2(R-1)} < 1 \\ &\Leftrightarrow F(R) < 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

dengan $F(R) = R \ln(R) - 2R + 2$. Berdasarkan persamaan (3.5) dan persamaan (3.6), $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$ jika dan hanya jika $R > 1$ dan $F(R) < 0$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$ jika dan hanya jika $1 < R < R_0$ dengan R_0 adalah akar dari $F(R)$ dalam $(1, \infty)$. Dapat diperiksa bahwa akar dari persamaan $F(R)$ adalah $R_0 \approx 4.9215536345$. Dengan demikian, diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.1.

- (i) Titik tetap $(0, 0)$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $0 < R < 1$.
(ii) Titik tetap $(x^*, y^*) = \left(\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2\right)$ dari sistem (1.3) adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika

$$1 < R < R_0, \quad (3.7)$$

dengan $R_0 \approx 4.9215536345$.

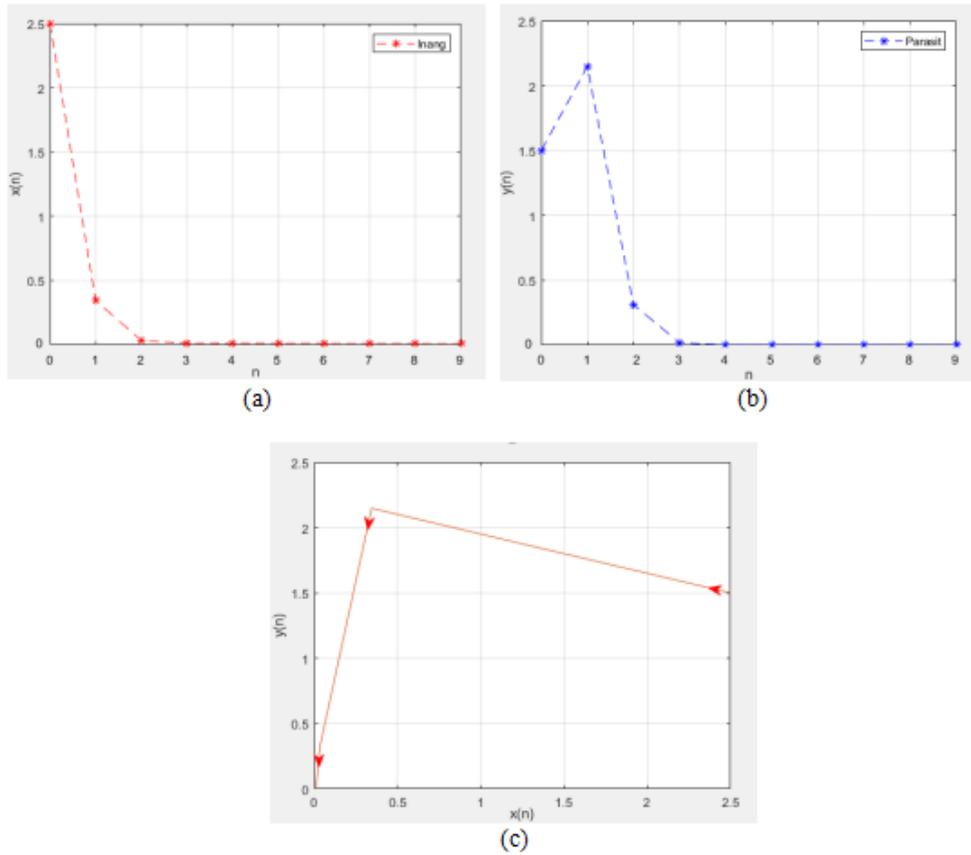
4. Beberapa Ilustrasi

Berikut ini diberikan beberapa contoh yang memperlihatkan kestabilan model inang parasit Nicholson-Bailey (1.3).

Contoh 4.1. Dapat diperiksa bahwa $(0, 0)$ adalah titik tetap dari sistem berikut:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 0.98x(n)e^{-1.6\sqrt{y(n)}}, \quad x_0 = 2.5. \\ y(n+1) &= x(n)(1 - e^{-1.6\sqrt{y(n)}}), \quad y_0 = 1.5. \end{aligned}$$

Karena $R = 0.98 < 1$, maka titik tetap $(0,0)$ adalah stabil asimtotik. Grafik solusi diberikan dalam Gambar 1(a) dan 1(b). Grafik $x(n)$ versus $y(n)$ diberikan dalam Gambar 1(c). Gambar 1(a), Gambar 1(b) dan Gambar 1(c) memperlihatkan bahwa



Gambar 1. (a). Grafik $x(n)$, (b). Grafik $y(n)$, (c). Grafik $x(n)$ versus $y(n)$

inang dan parasit kedua-duanya punah dengan berlalunya waktu.

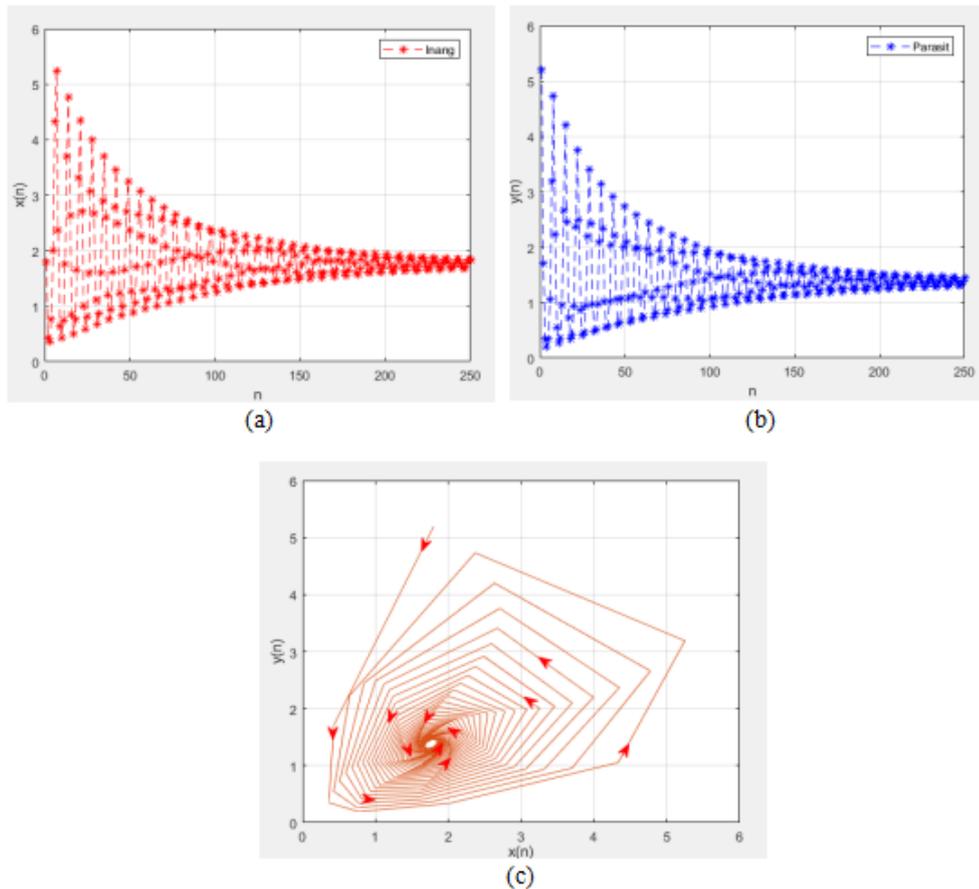
Contoh 4.2. Perhatikan sistem berikut:

$$x(n+1) = 4.6x(n)e^{-1.3\sqrt{y(n)}}, \quad x_0 = 1.8,$$

$$y(n+1) = x(n)(1 - e^{-1.3\sqrt{y(n)}}), \quad y_0 = 5.2.$$

Titik tetap dari sistem ini adalah $(1.76, 1.38)$. Nilai eigen dari matriks Jacobian $J_{(1.76, 1.38)}$ adalah $|\lambda_{1,2}| = 0.987411$. Karena $R < R_0$, maka berdasarkan Teorema 3.1, titik tetap $(1.76, 1.38)$ adalah stabil asimtotik. Grafik solusi diberikan dalam Gambar 2(a) dan Gambar 2(b). Grafik $x(n)$ versus $y(n)$ diberikan dalam Gambar 2(c).

Gambar 2(a), Gambar 2(b) dan Gambar 2(c) memperlihatkan bahwa inang dan



Gambar 2. (a). Grafik $x(n)$, (b). Grafik $y(n)$, (c). Grafik $x(n)$ versus $y(n)$

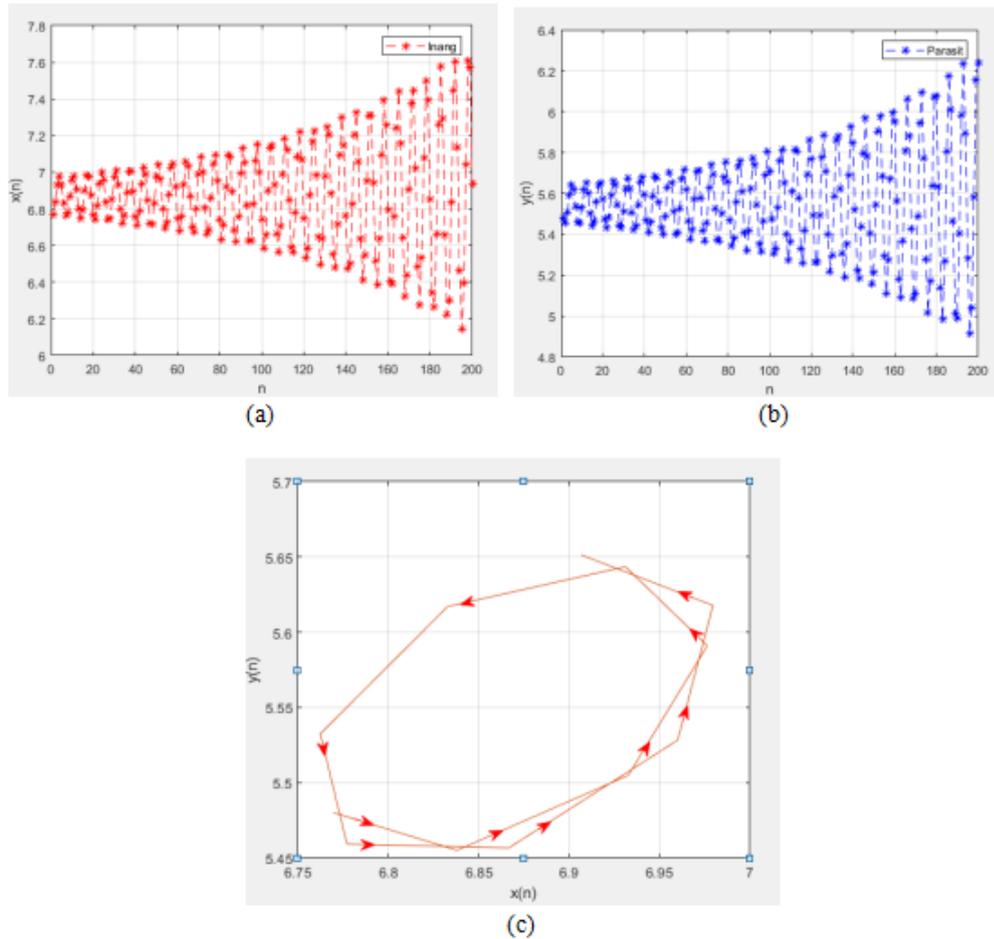
parasit kedua-duanya hidup berdampingan menuju ke titik tetap dengan berlalunya waktu.

Contoh 4.3. Perhatikan sistem berikut:

$$\begin{aligned}
 x(n+1) &= 5.2x(n)e^{-0.7\sqrt{y(n)}}, & x_0 &= 6.77, \\
 y(n+1) &= x(n)(1 - e^{-0.7\sqrt{y(n)}}), & y_0 &= 5.48.
 \end{aligned}$$

Titik tetap dari sistem ini adalah $(6.87, 5.55)$. Nilai eigen dari matriks Jacobian $J_{(6.87, 5.55)}$ adalah $|\lambda_{1,2}| = 1.010247$. Karena $R > R_0$, maka berdasarkan Teorema 3.1, titik tetap $(6.87, 5.55)$ adalah tidak stabil asimtotik. Grafik solusi diberikan dalam Gambar 3(a) dan 3(b). Grafik $x(n)$ versus $y(n)$ diberikan dalam Gambar 3(c).

Gambar 3(a), Gambar 3(b) dan Gambar 3(c) memperlihatkan bahwa inang dan parasit hidup tidak berdampingan, keduanya menjauhi titik tetap dengan berlalunya waktu.



Gambar 3. (a). Grafik $x(n)$, (b). Grafik $y(n)$, (c). Grafik $x(n)$ versus $y(n)$

5. Kesimpulan

Model inang parasit Nicholson-Bailey pada persamaan (1.3) memiliki dua titik tetap, yaitu $(0, 0)$ dan $\left(\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2\right)$. Titik tetap $(0, 0)$ adalah stabil asimtotik jika $0 < R < 1$. Sedangkan, titik tetap $\left(\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2\right)$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $1 < R < 4.9215536345$. Kestabilan asimtotik titik tetap $(0, 0)$ bermakna bahwa inang dan parasit punah jika $n \rightarrow \infty$. Kestabilan asimtotik titik tetap $\left(\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2\right)$ bermakna bahwa inang dan parasit hidup secara berdampingan, yaitu inang mendekati $\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2$ dan parasit mendekati $\left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2$ bila $n \rightarrow \infty$.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Susila Bahri, Ibu Haripamyu, dan Bapak Ahmad Iqbal Baqi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Nuraeni, Y., Anggraeni, I., Darwiati, W., 2016, Keanekaragaman Serangga Parasitoid untuk Pengendalian Hama pada Tanaman Kehutanan, Seminar Nasional PBI 2016, <https://eprints.uai.ac.id/25/>
- [2] Kuswardani, R. A., Maimunah, M., 2013, *Buku Ajar: Hama Tanaman Pertanian*, Universitas Medan Area, Medan
- [3] Nicholson, A.J., Bailey, J.A., 1935, The balance of animal populations Part 1, *Proc. of Zoological Society of London* Vol. **3**: 551 – 598
- [4] Misra, J.C., Mitra, A., 2005, Instabilities in Single-Species and Host-Parasitoid Systems : Period Doubling Bifurcations and Chaos, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. **52**: 525 – 538
- [5] Hassan, S. S., Ahluwalia, D., Maddali, R. K., Manglik, M., 2018, Computational Dynamics of the Nicholson-Bailey models, *The European Physical Journal Plus*, Vol. **133**: 349.
- [6] Kolade, O., Edson, P., 2022, Mathematical analysis and numerical simulation of time-fractional host-parasitoid system with Caputo operator, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics* Vol. **1**: 79 – 90
- [7] Gumus, O. K., 2017, Dynamics of a Host-Parasitoid Model Related to Smith Growth Form, *General Mathematics Notes* Vol. **38**(1): 72 – 84
- [8] Ufuktepe, U., Kapcak, S., 2013, Stability Analysis of Host Parasite Model, *Advanced in Difference Equation* Vol. **2013**: 79.
- [9] Khairunnisa, L., Baqi, A.I., Muhafzan, M., 2022, Analisis Kestabilan Model Inang Parasit, *Jurnal Matematika UNAND* Vol. **11**(2): 124 – 132
- [10] Qureshi M.N., Khan, A.Q, Din, Q., 2014, Asymptotic behavior of a Nicholson-Bailey model, *Advanced in Difference Equation* Vol. **2014**: 62
- [11] Elaydi, S., 2005, *An Introduction to Difference Equations*. Edisi ke-3, Springer, New York
- [12] Kelley, W.G., Peterson, A.C., 2001, *Difference Equations*, Academic Press, USA
- [13] Galor, O., 2006, *Discrete Dynamical System*, Springer, Providence, USA
- [14] Ramadhani, K., Muhafzan, M., Zulakmal, Z., 2022, Kestabilan Solusi Nol Sistem Diskrit Linier, *Jurnal Matematika UNAND* Vol. **11**(2): 104 – 111
- [15] Grove, E.A., Ladas, G., 2004, *Periodicities in Nonlinear Difference Equations*, Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton