

INJEKSI TOTAL AJAIB PADA GABUNGAN GRAF $K_{1,s}$ DAN GRAF mK_3 UNTUK m GENAP

ANGRELIA NOVA

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 angrelianova@yahoo.co.id*

Abstrak. Suatu injeksi total dari suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E adalah suatu pemetaan bijektif dari $V \cup E$ ke bilangan bulat positif N . Suatu injeksi total dikatakan injeksi total ajaib jika terdapat "konstanta ajaib" h dan k dimana h adalah jumlah dari setiap label titik dengan label yang bersisian dengan sisi dan k adalah jumlah dari setiap label sisi yang bersisian dengan titik. Total defisiensi dari injeksi total ajaib dengan label maksimum M adalah $M - V - E$. Suatu injeksi total ajaib dengan defisiensi 0 dinamakan suatu pelabelan total ajaib. Pada tulisan ini akan dikaji kembali paper [6] yang membahas tentang injeksi total ajaib pada gabungan graf bintang $K_{1,s}$ dengan graf UmK_3 , untuk m genap.

Kata Kunci: Graf bintang, graf segitiga, injeksi total ajaib, injeksi total

1. Pendahuluan

Misal terdapat $G = (V, E)$ dengan $v = |V|$ dan $e = |E|$. Suatu injeksi total dari G adalah sebuah pemetaan bijektif dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat positif. Jumlah label yang terkait dengan elemen graf disebut dengan bobot. Misal terdapat sisi $e = xy$ di suatu graf G , maka **bobot sisi e** , dinotasikan dengan $\omega(xy)$ adalah jumlah label sisi e dan label titik x dan y , atau dapat dituliskan

$$\omega(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y). \quad (1.1)$$

Misal terdapat titik x di suatu graf G , maka **bobot titik x** , dinotasikan dengan $\omega(x)$ adalah jumlah label titik x dan label semua sisi yang terkait dengan titik x , atau dapat dituliskan

$$\omega(x) = \lambda(x) + \lambda(xy). \quad (1.2)$$

Suatu pemetaan bijektif dari injeksi total λ dari G dikatakan sebagai :

- (a) suatu **injeksi titik ajaib** jika terdapat suatu konstanta titik h , dinamakan sebagai bobot titik, sehingga untuk setiap titik x berlaku,

$$\lambda(x) + \sum_{y \in N(x)} \lambda(xy) = h, \quad (1.3)$$

dimana $N(x)$ adalah himpunan tetangga dari x .

- (b) suatu **injeksi sisi ajaib** jika terdapat suatu konstanta sisi k , dinamakan sebagai bobot sisi, sehingga untuk setiap sisi xy ,

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k. \quad (1.4)$$

- (c) suatu **injeksi total ajaib** apabila λ memenuhi syarat injeksi titik ajaib dan injeksi sisi ajaib.

Total defisiensi dari suatu injeksi total ajaib dengan label terbesar M adalah $M - V - E$. Suatu total defisiensi (*total deficiency*) dari suatu graf G adalah defisiensi terkecil dari semua injeksi total ajaib dari G . Dalam injeksi total ajaib digunakan label $1, 2, \dots, m$. Suatu pelabelan total ajaib adalah suatu injeksi total ajaib dengan total defisiensi 0.

2. Injeksi total ajaib

Diberikan graf bintang $K_{1,s}$, untuk suatu bilangan bulat positif s , serta sebanyak m buah graf lengkap dengan tiga titik K_3 , atau dinamakan graf segitiga. Kemudian dibentuk graf baru yang merupakan gabungan dari graf $K_{1,s}$ dengan m graf K_3 sehingga ditulis $K_{1,s} \cup mK_3$, dengan m genap.

Himpunan titik dan himpunan sisi dari mK_3 didefinisikan oleh :

$$\begin{aligned} V(mK_3) &= \{x_i, y_i, z_i | 1 \leq i \leq m\} \\ E(mK_3) &= \{x_i y_i, x_i z_i, y_i z_i | 1 \leq i \leq m\}, \end{aligned}$$

sedangkan himpunan titik dan sisi dari $K_{1,s}$ didefinisikan oleh :

$$\begin{aligned} V(K_{1,s}) &= \{r, w_1, w_2, \dots, w_s\} = \{r\} \cup \{w_i | 1 \leq i \leq s\} \\ E(K_{1,s}) &= \{r w_i | 1 \leq i \leq s\}. \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dikaji injeksi total ajaib pada graf $K_{1,s} \cup mK_3$, yaitu dengan memperlihatkan bahwa $K_{1,s} \cup mK_3$ adalah suatu injeksi total ajaib graf berdasarkan lema dan teorema berikut ini.

Lema 2.1. [3] *Untuk setiap bilangan bulat positif m dengan m genap, graf mK_3 memuat suatu injeksi total ajaib dengan bobot titik $9m + 3$ dan bobot sisi $9m + 2$.*

Bukti. Untuk setiap $1 \leq i \leq m$, konstruksikan label terhadap titik-titik dan sisi di graf segitiga sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lambda(x_i) &= 2i - 1. \\ \lambda(y_i) &= \begin{cases} 4m + 1 - i, & \text{i genap;} \\ 3m - i, & \text{i ganjil.} \end{cases} \\ \lambda(z_i) &= \begin{cases} 5m + 1 - i, & \text{i genap;} \\ 6m + 2 - i, & \text{i ganjil.} \end{cases} \\ \lambda(z_i y_i) &= \lambda(x_i) + 1. \\ \lambda(x_i z_i) &= \lambda(y_i) + 1. \\ \lambda(x_i y_i) &= \lambda(z_i) + 1. \end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh $h = 9m + 3$ dan $k = 9m + 2$. $\square$

Lema 2.2. [3] *Untuk semua bilangan bulat positif m dan s , terdapat injeksi total ajaib dari mK_3 dengan bobot titik h dan bobot sisi k sehingga*

$$\frac{s(s+1)}{2} \leq 2h - k, \quad (2.1)$$

dan setiap label lebih besar dari $d = k - h$.

Bukti. Berdasarkan Akibat 3.5 [3] telah ditunjukkan bahwa mK_3 mempunyai injeksi total ajaib, dengan bobot titik $h = a$ dan bobot sisi $k = b$ dimana $d = k - h$. Selanjutnya diperoleh injeksi total ajaib yang baru dari penambahan c ke setiap label titik, dimana

$$c = \max \left\{ d, \frac{\frac{s(s+1)}{2} - 2a + b}{3} \right\}. \quad (2.2)$$

Diperoleh suatu injeksi total ajaib dengan $h = a + 3c$ dan $k = b + 3c$, dimana d tidak berubah.

$$\begin{aligned} 2h - k &= 2(a + 3c) - (b + 3c) \\ &= 2a + 6c - b - 3c \\ &= 2a - b + 3c \\ &\geq 2a - b + 3 \left(\frac{\frac{s(s+1)}{2} - 2a + b}{3} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan (2.2) maka (2.3) menjadi

$$2h - k \geq \frac{s(s+1)}{2}. \quad \square$$

Teorema 2.3. [3] *Untuk setiap $m \geq 0$ dan $s > 1$, $K_{1,s} \cup mK_3$ adalah graf yang mempunyai injeksi total ajaib.*

Bukti. Misalkan $m \geq 0$ dan $s \geq 3$. Misalkan terdapat injeksi dari segitiga yang memenuhi Lema 2.2, dengan $h = a$ dan $k = b$. Anggap $a < b$. Apabila $h > k$ maka diasumsikan bahwa $k \geq h$ dengan melakukan proses rotasi. Proses rotasi pada graf mK_3 adalah suatu injeksi total ajaib yang diperoleh dari proses perputaran label-label dalam segitiga satu langkah searah putaran jarum jam, sehingga label titik menjadi label sisi dan sebaliknya. Kemudian diperoleh bahwa $d = k - h \geq 0$.

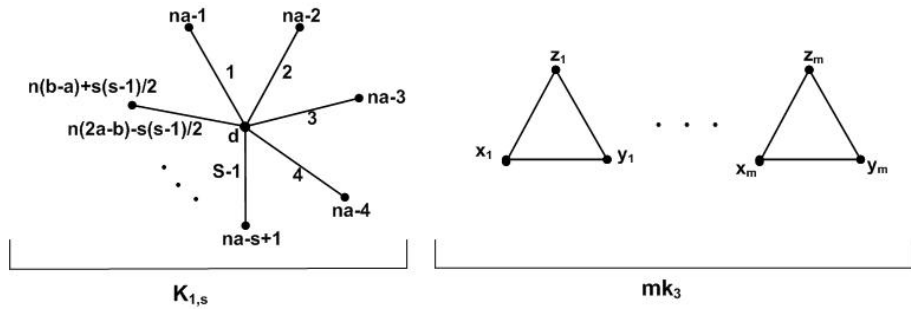
Kalikan setiap label dengan n , di mana $n = \frac{s(s-1)}{2} + 1$. Ini memberikan suatu injeksi total ajaib dari segitiga dengan $h' = na$, $k' = nb$ dan $d = nb - na$. Perhatikan bahwa dari Lema 2.2, setiap label lebih besar dari d . Sekarang labeli titik pusat dari bintang dengan d . Labeli sebanyak $s - 1$ sisi bintang dengan $1, 2, \dots, s - 1$ dan titik-titik yang bersesuaian dengan $na - 1, na - 2, \dots, na - s + 1$. Labeli sisi terakhir dengan

$$n(2a - b) - \frac{s(s-1)}{2}, \quad (2.4)$$

dan label titik yang bersesuaian dengan

$$n(b-a) + \frac{s(s-1)}{2}. \quad (2.5)$$

Dapat dilihat pada Gambar 2.8 berikut.



Gambar 1. Injeksi total ajaib dari $K_{1,s} \cup mK_3$.

Perhatikan bahwa tak satupun label ini habis dibagi n , sehingga jelas bahwa label-label tersebut tidak digunakan dalam pelabelan dari segitiga atau pada titik pusat. Dari syarat pada Lema 2.2 jelas bahwa

$$n(2a-b) - \frac{s(s-1)}{2} \geq \frac{ns(s+1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} \geq s. \quad (2.6)$$

Oleh karena itu, semua label pada semua sisi akan berbeda. Selanjutnya, karena

$$na + s - 1 < nb + \frac{s(s-1)}{2}, \quad (2.7)$$

diperoleh

$$n(2a-b) - s(s-1)/2 < na - s + 1. \quad (2.8)$$

Jelas bahwa dari pertidaksamaan (2.7) dan persamaan (2.8) diperoleh

$$s-1 < n(b-a) + \frac{s(s-1)}{2}. \quad (2.9)$$

Selanjutnya, dari Lema 2.2 diperoleh bahwa,

$$\begin{aligned} n(2a-b) &\geq 2a-b, \\ &\geq \frac{s(s+1)}{2}, \\ &> \frac{s(s-1)}{2} + s-1. \end{aligned}$$

Jadi diperoleh bahwa

$$na - s + 1 > n(b-a) + s(s-1)/2. \quad (2.10)$$

Ini berarti bahwa semua label-label berbeda, kecuali kemungkinan dari (2.8) dan (2.10), yaitu

$$n(2a-b) - \frac{s(s-1)}{2} \text{ dan } n(b-a) + \frac{s(s-1)}{2}.$$

Asumsikan bahwa kedua label tersebut bernilai sama, yaitu

$$n(2a - b) - \frac{s(s-1)}{2} = n(b - a) + \frac{s(s-1)}{2}. \quad (2.11)$$

Maka,

$$\left(\frac{s(s-1)}{2} + 1 \right) (3a - 2b) = s(s-1), \quad (2.12)$$

atau dapat juga ditulis sebagai berikut.

$$\left(1 + \frac{2}{s(s-1)} \right) (3a - 2b) = 2, \quad (2.13)$$

dengan $0 < 3a - 2b < 2$. Karena $3a - 2b$ adalah bilangan bulat, maka haruslah $3a - 2b = 1$. Tapi, dari persamaan (2.13) diperoleh $s = 2$. Jadi haruslah berlaku bahwa semua label berbeda. $\square$

3. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Lyra Yulianti, Bapak Narwen, Bapak Budi Rudianto, Bapak Ahmad Iqbal Baqi dan Bapak Syafruddin yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Baskoro, E. T. 2007. *Mengenalkan Indonesia Melalui Teori Graf*. Balai Pertemuan Ilmiah ITB, Bandung
- [2] Bondy, J.A, Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications*. Onratio, Canada
- [3] Calhoun, B., dkk. 2005. Totally Magic Labelings Graphs. *Australas.J.Combin.* **32**: 47 – 59
- [4] Lipschutz, Seymour. Lipson Marc. 2007 *Matematika Diskrit*. Erlangga, Jakarta
- [5] Lipschutz, Seymour. 1964 *Set Theory*. McGraw-Hill, Inc
- [6] McSorley, John P. 2006. Totally Magic Injections of Graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **56**: 65 – 81