

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF HELM H_m DENGAN $3 \leq m \leq 9$

KELSON NOVRIANUS LESSYA, DES WELYYANTI*, LYRA YULIANTI

*Departemen Matematika dan Sains Data,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
 email : kelsonnovrianuslessya@gmail.com, wely@sci.unand.ac.id, lyra@sci.unand.ac.id*

Diterima 6 Maret 2023 Direvisi 3 Mei 2023 Dipublikasikan 21 Oktober 2023

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu k -pewarnaan dari G . Kelas warna pada G adalah himpunan titik-titik yang berwarna i , dinotasikan dengan S_i untuk $1 \leq i \leq k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$ kedalam kelas-kelas warna yang saling bebas. Berdasarkan pewarnaan titik, maka representasi titik v terhadap Π disebut kode warna dari v , dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai k -pasang terurut, yaitu:

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$$

dengan $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik pada G memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π , maka c disebut pewarnaan lokasi. Banyaknya warna minimum yang digunakan disebut bilangan kromatik lokasi, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Pada tulisan ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi graf helm H_m dengan $3 \leq m \leq 9$.

Kata Kunci: Bilangan Kromatik Lokasi, Graf Helm, Kode Warna

1. Pendahuluan

Konsep bilangan kromatik lokasi merupakan perpaduan konsep pewarnaan titik suatu graf dan konsep dimensi partisi suatu graf. Pewarnaan titik pada suatu graf ialah pemberian warna ke semua titik pada graf dengan syarat setiap titik-titik yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi pada suatu graf disebut bilangan kromatik lokasi, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Bilangan kromatik lokasi diperkenalkan pertama kali oleh Chartrand dkk pada tahun 2012. Chartrand dkk [1] memperoleh bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf, di antaranya adalah $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil dan $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap, dimana C_n adalah graf lingkaran dengan n titik. Asmiati dkk [2] pada tahun 2012 memperoleh bilangan kromatik lokasi untuk graf kembang api.

*penulis korespondensi

Pada tahun yang sama, Asmiati dan Baskoro [3] mengkarakterisasi semua graf yang memuat siklus berbilangan kromatik lokasi tiga. Lalu, Welyyanti dkk [4] pada tahun 2014 memperluas pengertian bilangan lokasi kromatik suatu graf, sehingga dapat diaplikasikan pada semua jenis graf termasuk graf tak terhubung. Pada tahun yang sama, Behtoei dan Anbarloei [5] membahas tentang bilangan kromatik lokasi graf terhubung untuk graf Roda. Pada [6], Welyyanti dkk. membahas tentang titik dominan pada suatu graf. Selanjutnya, pada [7] dan [8] dibahas tentang bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung dengan graf lintasan, lingkaran dan bintang ganda sebagai komponen-komponennya.

Khusus untuk graf helm telah dikaji beberapa konsep graf pada graf tersebut. Rahayu dan Kuswardi [9] pada tahun 2018 membahas tentang dekomposisi graf helm. Lalu, Sancoko [10] pada tahun 2020 memperoleh pelabelan antiajaib jarak pada beberapa kelas graf terkait graf helm.

Definisi teori graf yang digunakan pada penelitian ini diambil dari [11]. Graf Lingkaran C_m merupakan graf terhubung yang mempunyai m titik yang setiap titiknya berderajat 2, dengan $V(C_m) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Graf Roda W_m diperoleh dari penambahan satu titik x dan m sisi $\{x_0x_i | 1 \leq i \leq m\}$ ke graf lingkaran. Pada Gambar 1 diberikan graf roda W_m untuk $m \geq 3$.

Definisi graf helm H_m dikutip dari [9]. Misalkan terdapat graf roda W_m dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(W_m) &= \{x_0, x_1, \dots, x_m\}, \\ E(W_m) &= \{x_0x_1 | 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_jx_{j+1} | 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_1x_m\}. \end{aligned}$$

Graf helm H_m dikonstruksi dengan cara menambahkan titik y_i , $1 \leq i \leq m$, yang bertetangga dengan titik x_i , $1 \leq i \leq m$ di graf roda W_m . Misalkan terdapat graf Helm H_m dengan $m \geq 3$, maka himpunan titik dan himpunan sisi graf Helm H_m adalah sebagai berikut.

$$V(H_m) = \{x_0\} \cup \{x_i, y_i | 1 \leq i \leq m\}, \quad (1.1)$$

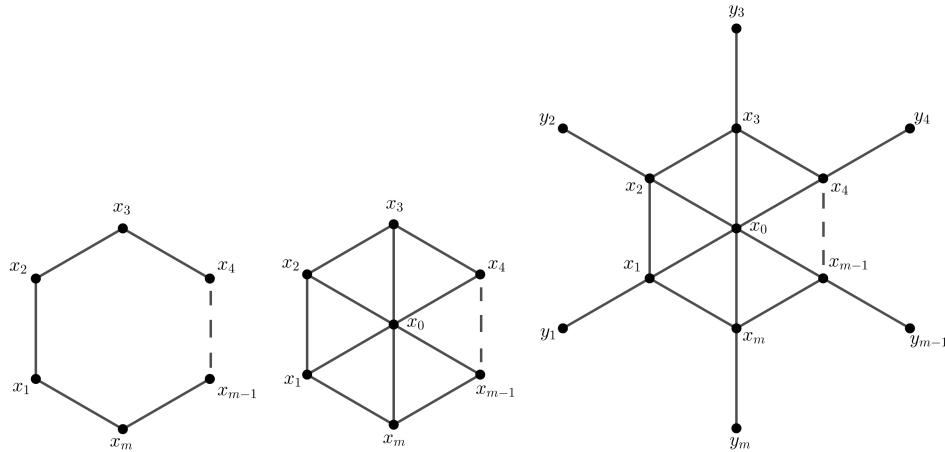
$$\begin{aligned} E(H_m) &= \{x_0x_1 | 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_jx_{j+1} | 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_1x_m\} \\ &\cup \{x_iy_i | 1 \leq i \leq m\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Untuk lebih jelasnya, graf lingkaran C_m , graf roda W_m dan graf helm H_m dapat dilihat pada Gambar 1.

Misal $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ merupakan suatu pewarnaan titik di G . Misal S_i adalah himpunan titik yang diberi warna i , untuk $1 \leq i \leq k$. Definisikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ sebagai himpunan kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k -pasang terurut

$$(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$, untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π , maka c disebut pewarnaan lokasi dari G . Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Titik $v \in V(G)$ disebut titik dominan jika $d(v, S_i) = 1$ untuk $v \notin S_i$ dan 0 untuk yang lainnya.

Gambar 1. Graf Lingkaran C_m , Graf Roda W_m dan Graf Helm H_m untuk $m \geq 3$.

Chartrand dkk. [1] memberikan teorema dasar bilangan kromatik lokasi suatu graf. Teorema tersebut akan dijelaskan pada teorema-teorema di bawah ini. Notasikan $N(v)$ sebagai himpunan yang berisi semua titik yang bertetangga dengan v . Diperoleh Teorema 1.1 dan Akibat 1.2 berikut.

Teorema 1.1. [1] Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus jika u dan v titik titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) \neq N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Akibat 1.2. [1] Misalkan G adalah graf terhubung dengan satu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Pada penelitian ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi graf helm H_m , untuk $3 \leq m \leq 9$.

2. Bilangan Kromatik Lokasi Graf Helm H_m untuk $3 \leq m \leq 9$

Pada bagian ini akan dibahas tentang penentuan bilangan kromatik lokasi untuk graf helm yang dinotasikan sebagai H_m , dengan $3 \leq m \leq 9$.

Teorema 2.1. Jika H_m adalah graf helm dengan $3 \leq m \leq 9$, maka :

$$\chi_L(H_m) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } 3 \leq m \leq 9 \text{ dan } m \neq 8, \\ 5, & \text{untuk } m = 8. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan terdapat graf helm H_m dengan himpunan titik dan himpunan sisi yang diberikan pada Persamaan (1.1) dan (1.2). Misalkan c adalah pewarnaan lokasi dan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi titik-titik pada graf H_m , dengan S_i

menyatakan kelas warna ke- i untuk $1 \leq i \leq k$. Karena x_j bertetangga dengan y_j maka $c(x_j) \neq c(y_j)$. Misal $c(x_j) = c(x_t)$ untuk $1 \leq j, t \leq m$ maka $c(y_j) \neq c(y_t) \neq c(x_j)$ dengan $j \neq t$.

Akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf H_m untuk $3 \leq m \leq 9$. Pandang dua kasus berikut.

Kasus 1. Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(H_m) = 4$ untuk $3 \leq m \leq 9$ dan $m \neq 8$.

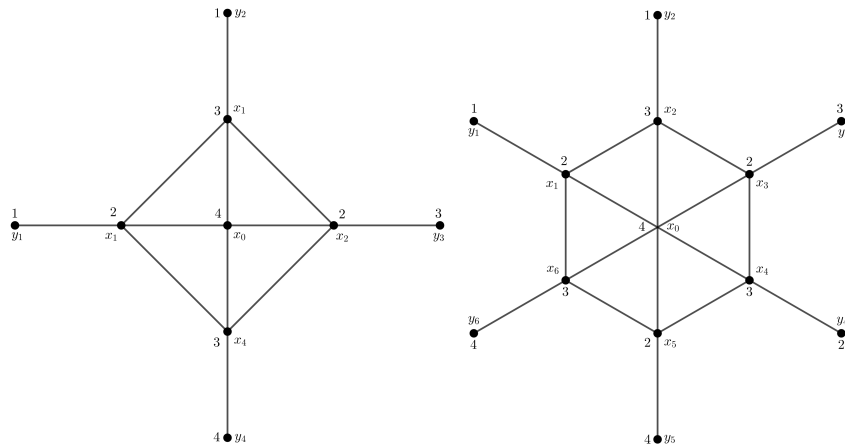
Kasus 1.1 Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(H_m) = 4$ dengan $m = 4, 6$.

Definisikan pemetaan $c : V(H_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, sedemikian sehingga.

$$\begin{aligned} c(x_0) &= 4, \\ c(y_i) &\in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c(x_i)\}, \\ c(x_i) &= \begin{cases} 2, & \text{untuk } i \text{ ganjil,} \\ 3, & \text{untuk } i \text{ genap.} \end{cases} \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi di atas diperoleh kode warna setiap titik di H_m terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sebagai berikut. Pada Gambar 2 diberikan pewarnaan 4-lokasi graf H_m untuk $m = 4, 6$.

$$\begin{aligned} c_\Pi(x_1) &= (1, 0, 1, 1), \quad c_\Pi(y_1) = (0, 1, 2, 2), \quad c_\Pi(x_3) = (2, 0, 1, 1), \quad c_\Pi(y_3) = (3, 1, 2, 0), \\ c_\Pi(x_5) &= (3, 0, 1, 1), \quad c_\Pi(y_5) = (4, 1, 2, 0), \quad c_\Pi(x_2) = (1, 1, 0, 1), \quad c_\Pi(y_2) = (0, 2, 1, 2), \\ c_\Pi(x_4) &= (2, 1, 0, 1) \text{ untuk } m = 4, \quad c_\Pi(x_4) = (3, 1, 0, 1) \text{ untuk } m = 6, \\ c_\Pi(y_4) &= (3, 2, 1, 0) \text{ untuk } m = 4, \quad c_\Pi(y_4) = (4, 0, 1, 2) \text{ untuk } m = 6, \\ c_\Pi(x_6) &= (2, 1, 0, 1), \quad c_\Pi(y_6) = (3, 2, 1, 0), \quad c_\Pi(x_0) = (2, 1, 1, 0). \end{aligned}$$



Gambar 2. Pewarnaan 4-lokasi graf H_m untuk $m = 4, 6$.

Dari kode warna di atas dapat dilihat bahwa setiap titik di H_m memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π . Jadi, $\chi_L(H_m) \leq 4$.

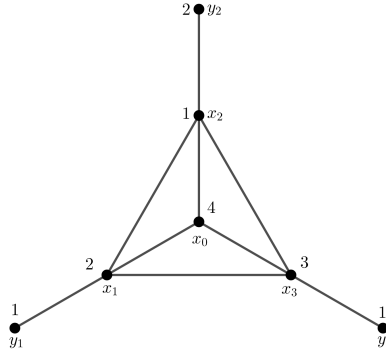
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(H_m) \geq 4$. Andaikan $\chi_L(H_m) = 3$. Artinya graf H_m untuk $m = 4, 6$ mempunyai pewarnaan titik dengan tiga warna. Jika titik x_0 diwarnai oleh salah satu dari tiga warna tersebut, maka titik x_i untuk $i = 1, 2, \dots, m$ akan hanya diwarnai oleh dua warna selain warna titik x_0 . Akibatnya, pewarnaan titik tersebut akan mempunyai paling sedikit dua titik dominan dengan warna yang sama. Akibatnya, haruslah $\chi_L(H_m) \geq 4$. Jadi $\chi_L(H_m) = 4$ untuk $m = 4, 6$.

Kasus 1.2. Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(H_m) = 4$ dengan $m = 3, 5, 7, 9$.
 $m = 3$.

Definisikan pemetaan $c : V(H_3) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, sebagai berikut.

$$c(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{x_2, y_1, y_3\}, \\ 2, & v \in \{x_1, y_2\}, \\ 3, & v \in \{x_3\}, \\ 4, & v \in \{x_0\}. \end{cases}$$

Pada Gambar 3 diberikan pewarnaan 4-lokasi graf H_3 .



Gambar 3. Pewarnaan 4-lokasi graf H_m untuk $m = 3$.

Berdasarkan definisi di atas diperoleh kode warna dari titik-titik pada graf H_3 terhadap $\Pi =$ disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(x_2) &= (0, 1, 1, 1), & c_{\Pi}(y_1) &= (0, 1, 2, 2), & c_{\Pi}(y_3) &= (0, 2, 1, 2), \\ c_{\Pi}(x_1) &= (1, 0, 1, 1), & c_{\Pi}(y_2) &= (1, 0, 2, 2), & c_{\Pi}(x_3) &= (1, 1, 0, 1), \\ c_{\Pi}(x_0) &= (1, 1, 1, 0). \end{aligned}$$

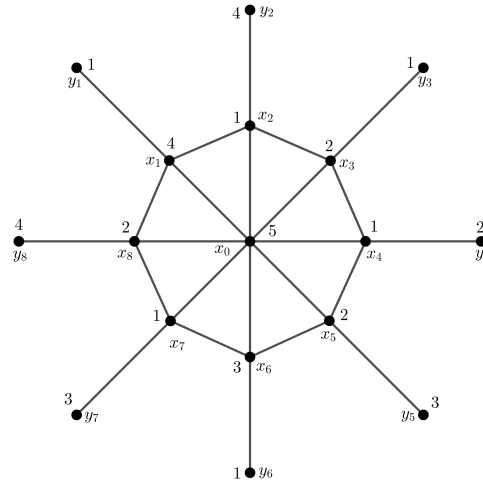
Dari kode warna di atas dapat dilihat bahwa, setiap titik di H_3 memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π . Jadi, $\chi_L(H_3) \leq 4$. Selanjutnya, pembuktian $\chi_L(H_3) \geq 4$ serupa dengan pembuktian $\chi_L(H_m) \geq 4$ untuk $m = 4, 6$ pada Kasus 1.1. Jadi $\chi_L(H_3) = 4$.

Untuk pembuktian bilangan kromatik lokasi $\chi_L(H_m) = 4$ untuk $m = 5, 7, 9$ serupa untuk pembuktian bilangan kromatik lokasi $\chi_L(H_3) = 4$.

Kasus 2 Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(H_m) = 5$ untuk $m = 8$.
 Definisikan pemetaan $c : V(H_8) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$, sebagai berikut.

$$c(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{x_2, x_4, x_7, y_1, y_3, y_6\}, \\ 2, & v \in \{x_3, x_5, x_8, y_4\}, \\ 3, & v \in \{x_6, y_5, y_7\}, \\ 4, & v \in \{x_1, y_2, y_8\}, \\ 5, & v \in \{x_0\}. \end{cases}$$

Pada Gambar 4 diberikan pewarnaan 5-lokasi graf H_8 . Kode warna setiap titik di



Gambar 4. Pewarnaan 5-lokasi graf H_m untuk $m = 8$.

H_8 terhadap Π sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c_\Pi(x_7) &= (0, 1, 1, 2, 1), & c_\Pi(x_2) &= (0, 1, 2, 1, 1), & c_\Pi(x_4) &= (0, 1, 2, 2, 1), \\ c_\Pi(y_3) &= (0, 1, 3, 3, 2), & c_\Pi(y_6) &= (0, 2, 1, 3, 2), & c_\Pi(y_1) &= (0, 2, 3, 1, 2), \\ c_\Pi(x_5) &= (1, 0, 1, 2, 1), & c_\Pi(x_8) &= (1, 0, 2, 1, 1), & c_\Pi(x_3) &= (1, 0, 2, 2, 1), \\ c_\Pi(y_4) &= (1, 0, 3, 3, 2), & c_\Pi(x_6) &= (1, 1, 0, 2, 1), & c_\Pi(y_7) &= (1, 2, 0, 3, 2), \\ c_\Pi(y_5) &= (2, 1, 0, 3, 2), & c_\Pi(x_1) &= (1, 1, 2, 0, 1), & c_\Pi(y_2) &= (1, 2, 3, 0, 2), \\ c_\Pi(y_8) &= (2, 1, 3, 0, 2), & c_\Pi(x_0) &= (1, 1, 1, 1, 0). \end{aligned}$$

Dari kode warna di atas dapat dilihat bahwa setiap titik di H_8 memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π . Jadi, $\chi_L(H_8) \leq 5$. Selanjutnya, pembuktian $\chi_L(H_8) \geq 5$ serupa dengan pembuktian $\chi_L(H_m) \geq 4$ untuk $m = 4, 6$ pada Kasus 1.1. Jadi $\chi_L(H_8) = 5$. $\square$

3. Kesimpulan

Pada penelitian ini telah dibahas bilangan kromatik lokasi graf helm, yang dinotasikan sebagai H_m untuk $3 \leq m \leq 9$ dan telah diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\chi_L(H_m) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } 3 \leq m \leq 9 \text{ dan } m \neq 8, \\ 5, & \text{untuk } m = 8. \end{cases}$$

4. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada bapak Narwen, ibu Yanita dan ibu Susila Bahri yang telah memberikan kritik dan saran guna menjadikan penulisan makalah ini lebih baik.

Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G., M.A. Henning, P.J. Slater, dan P. Zhang, 2002, The Locating-Chromatic Number of a Graph, *Bull.Inst. Combin. Appl* Vol. **36**: 89 – 101
- [2] Asmiati, E. T. Baskoro, H. Assiyatun, D. Suprijanto, R. Simanjuntak, dan S. Uttunggadewa, 2012, The Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences* Vol. **63**(1): 11 – 23
- [3] Asmiati dan E.T. Baskoro, 2012. Characterizing All Graphs Containing Cycles With Locating-Chromatic Number 3, *The 5th International Conference on Research and Education in Mathematics AIP Conf. Prof.* **1450**: 321 – 357
- [4] Welyyanti, D., E. T. Baskoro., R. Simanjuntak., S. Uttunggadewa, 2014, The Locating-Chromatic Number of Disconnected Graph, *Far East Journal of Mathematical Science*, **94**(2): 169 – 182
- [5] Behtoei, A. dan Anbarloei, M. 2014. The Locating Chromatic Number of The Join Graphs. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society* Vol. **40**(6): 1491 – 1504
- [6] Welyyanti, D., E. T. Baskoro., R. Simanjuntak., S. Uttunggadewa, 2015, On Locating-Chromatic Number for Graphs with Dominant Vertices, *Procedia Computer Science* Vol. **74**: 89 – 92
- [7] Welyyanti, D. 2018. Beberapa Syarat Cukup untuk Bilangan Kromatik Lokasi Hingga pada Graf Tak Terhubung. *Eksakta*. **19**(1): 76 - 82.
- [8] Welyyanti, D., R. Lestari dan S.R. Putri. 2019. The locating-Chromatic Number of Disconnected Graph with Path and Cycle Graph as its Components. *IOP Conference Series*. **1317**: 1 – 7
- [9] Rahayu, R. D., Y. Kuswardi, 2018, Dekomposisi Graf Helm, *Journal of Mathematics and Mathematics Education* Vol. **8**(1): 31 – 45
- [10] Sancoko, S.W., 2020, Pelabelan Antiajaib Jarak Beberapa Kelas Graf Terkait Graf Helm, *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika* Vol. **4**(2): 93 – 102
- [11] Bondy, J.A., U.S.R. Murty, 1976, *Graph Theory with Application*, Elsevier Science Publishing, New York
- [12] Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J. dan Zhang, P., 2003, Graph of Order n With Locating-Chromatic Number $n - 1$, *Discrete Math* Vol. **269**: 65 – 79