Jurnal Matematika UNAND
Vol. **3** No. **1** Hal. 58 – 62
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

HUBUNGAN ANTARA HIMPUNAN KUBIK ASIKLIK DENGAN *RECTANGLE*

SISKA NURMALA SARI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
siska.nurmala95@yahoo.com

Abstrak. Dalam artikel ini akan dipelajari hubungan antara himpunan kubik asiklik dengan *rectangle*. Diberikan suatu kubus dasar Q yang merupakan suatu hasil kali berhingga dari interval-interval dasar $I = [l, l+1]$ atau $I = [l, l]$ untuk suatu $l \in \mathbb{Z}$. suatu himpunan kubik X adalah gabungan berhingga dari kubus-kubus dasar Q. Himpunan kubik dengan bentuk $X = [k_1, l_1] \times [k_2, l_2] \times \cdots \times [k_n, l_n] \subset \mathbb{R}^n$ disebut *rectangle*, dimana k_i, l_i adalah bilangan bulat dan $k_i \leq l_i$. Selanjutnya diperoleh bahwa sebarang *rectangle* X adalah asiklik, dengan kata lain $H_k(X)$ isomorfik dengan $\mathbb{Z}$ jika $k = 0$, dan $H_k(X)$ isomorfik dengan 0 jika $k > 0$.

Kata Kunci: Himpunan kubik, asiklik, isomorfik

1. Pendahuluan

Topologi merupakan cabang matematika yang merupakan pengembangan dari geometri. Sesuai dengan namanya, topologi, kajian awal bidang ini adalah dengan mempertimbangkan konsep 'tempat' dalam struktur lokal maupun globalnya (konsep ruang topologi).

Misalkan diberikan ruang topologi X. Selanjutnya didefinisikan suatu objek aljabar $H_*(X)$ yang disebut dengan homologi dari X, dimana secara topologi $H_*(X)$ adalah suatu invarian, artinya jika X dan Y adalah homeomorfik maka $H_*(X)$ dan $H_*(Y)$ adalah isomorfik,

$$X \approx Y \Rightarrow H_*(X) \cong H_*(Y).$$

$H_*(X)$ merupakan koleksi dari grup homologi ke-k dari X yang dinotasikan dengan $H_k(X)$.

Tulisan ini difokuskan pada homologi kubik, dimana ruang topologi dapat direpresentasikan sebagai suatu kubik. Suatu kubus dasar Q adalah suatu hasil kali hingga dari interval-interval dasar $I = [l, l+1]$ atau $I = [l, l]$ untuk suatu $l \in \mathbb{Z}$. Jadi, $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$. Himpunan kubik merupakan suatu kelas khusus dari ruang topologi.

Salah satu jenis dari himpunan kubik adalah himpunan kubik asiklik, dimana homologi dimensi ke-k adalah

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{jika k} = 0, \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Himpunan kubik dengan bentuk $X = [k_1, l_1] \times [k_2, l_2] \times \cdots \times [k_n, l_n] \subset \mathbb{R}^n$ disebut *rectangle*, dimana k_i, l_i adalah bilangan bulat dan $k_i \leq l_i$. *Rectangle* juga dapat dikatakan sebagai kubus dasar jika $k_i = l_i$ atau $k_i + 1 = l_i$ untuk setiap i. Tulisan ini bertujuan untuk mengkaji hubungan antara himpunan kubik asiklik dengan *rectangle*.

2. Hubungan Antara Himpunan Kubik Asiklik dengan *Rectangle*

Definisi 2.1. [1] *Rectangle adalah suatu himpunan dengan bentuk* $X = [k_1, l_1] \times [k_2, l_2] \times \cdots \times [k_n, l_n] \subset \mathbb{R}^n$*, dimana* k_i, l_i *adalah bilangan bulat dan* $k_i \leq l_i$.

Sebarang *rectangle* adalah himpunan kubik. *Rectangle* juga dapat dikatakan sebagai kubus dasar jika $k_i = l_i$ atau $k_i + 1 = l_i$ untuk setiap i.

Teorema 2.2. [1] *Sebarang Rectangle X adalah asiklik.*

Bukti. Misalkan $\Delta = [k, l] \subset \mathbb{R}$ suatu interval dengan titik ujung bilangan bulat dan didefinisikan

$$\mu(\Delta) := \begin{cases} l - k, & \text{jika } l > k, \\ 1, & \text{jika } k = l. \end{cases} \tag{2.1}$$

Interval Δ merupakan interval dasar jika dan hanya jika $\mu(\Delta) = 1$.

Misalkan X suatu *rectangle*, sehingga dapat ditulis sebagai

$$X = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \times \Delta_d,$$

dimana $\Delta_i = [k_i, l_i]$ merupakan interval dengan titik ujung bilangan bulat. Didefinisikan

$$\mu(X) := \mu(\Delta_1)\mu(\Delta_2)\cdots\mu(\Delta_d).$$

Untuk setiap m akan dibuktikan *rectangle* X adalah asiklik, yaitu dengan menggunakan induksi terhadap $m := \mu(X)$.

- Untuk $m = 1$.
  Jika $m = 1$ maka X merupakan kubus dasar. Oleh karena itu, X asiklik berdasarkan Teorema 2.76 [1].
- Untuk $m > 1$.
  Asumsikan bahwa X adalah asiklik untuk semua $\mu(X) < m$. Karena $m > 1$ maka $\mu(\Delta_{i_0}) = l_{i_0} - k_{i_0} \geq 2$ untuk suatu $i_0 \in \{1, 2, \cdots, d\}$. Misalkan diberikan sebarang *rectangle*

  $$\begin{aligned} X &:= [k_1, l_1] \times \cdots \times [k_{i_0}, l_{i_0}] \times \cdots \times [k_d, l_d], \\ X_1 &:= [k_1, l_1] \times \cdots \times [k_{i_0}, k_{i_0} + 1] \times \cdots \times [k_d, l_d], \\ X_2 &:= [k_1, l_1] \times \cdots \times [k_{i_0} + 1, l_{i_0}] \times \cdots \times [k_d, l_d]. \end{aligned}$$

  Akibatnya diperoleh

  $$X_1 \cap X_2 = [k_1, l_1] \times \cdots \times [k_{i_0} + 1] \times \cdots \times [k_d, l_d]$$

adalah suatu *rectangle* dan

$$\mu(X_1) = \mu(X_1 \cap X_2) = \frac{\mu(X)}{\mu(\Delta_{i_0})} < m,$$
$$\mu(X_2) = \mu(X)\frac{\mu(\Delta_{i_0}) - 1}{\mu(\Delta_{i_0})} < m.$$

Maka berdasarkan asumsi induksi diperoleh bahwa X_1, X_2, dan $X_1 \cap X_2$ masing-masing adalah asiklik. Karena $\mu(X) = \mu(X_1 \cup X_2) = m$ dan berdasarkan Teorema 2.78 [1], maka X adalah asiklik. $\square$

Pernyataan pada Teorema 2.2 tidak berlaku sebaliknya, yaitu tidak semua himpunan kubik yang asiklik adalah *rectangle*.

Contoh 2.3. Misal diberikan himpunan kubik

$$\Gamma^1 = [0,1] \times [0] \cup [0] \times [0,1].$$

Himpunan-himpunan dari kubus dasar adalah

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_0(\Gamma^1) &= \{[0] \times [0], [0] \times [1], [1] \times [0]\},\\
\mathcal{K}_1(\Gamma^1) &= \{[0,1] \times [0], [0] \times [0,1]\}.
\end{aligned}$$

Maka basis untuk himpunan rantai-rantai dari kubus dasar adalah

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{K}}_0(\Gamma^1) &= \{\widehat{[0] \times [0]}, \widehat{[0] \times [1]}, \widehat{[1] \times [0]}\},\\
&= \{\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]}, \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]}, \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}\},\\
\widehat{\mathcal{K}}_1(\Gamma^1) &= \{\widehat{[0,1] \times [0]}, \widehat{[0] \times [0,1]}\},\\
&= \{\widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[0]}, \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]}\}.
\end{aligned}$$

Untuk menghitung operator batas dari Γ^1, perlu dihitung batas dari anggota-anggota basisnya.

$$\begin{aligned}
\partial(\widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[0]}) &= \partial\widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[0]} + (-1)^{\dim\ \widehat{[0,1]}}\widehat{[0,1]} \diamond \partial\widehat{[0]},\\
&= (\widehat{[1]} - \widehat{[0]}) \diamond \widehat{[0]} + (-1)^1\widehat{[0,1]} \diamond 0,\\
&= \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]} - \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} - 1(0),\\
&= \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]} - \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]},\\
&= -\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}.\\
\partial(\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]}) &= \partial\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]} + (-1)^{\dim\ \widehat{[0]}}\widehat{[0]} \diamond \partial\widehat{[0,1]},\\
&= 0 \diamond \widehat{[0,1]} + (-1)^0\widehat{[0]} \diamond (\widehat{[1]} - \widehat{[0]}),\\
&= 0 + \widehat{[0]} \diamond (\widehat{[1]} - \widehat{[0]}),\\
&= \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} - \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]},\\
&= -\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya, ditentukan basisnya

$$\begin{aligned}
\partial(\widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[0]}) &= -\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}, \\
&= -1(\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]}) + 0(\widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]}) + 1(\widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}) + 0(\widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]}). \\
\partial(\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]}) &= -\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]}, \\
&= -1(\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]}) + 1(\widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]}) + 0(\widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}) + 0(\widehat{[1]} \diamond \widehat{[1]}).
\end{aligned}$$

Sehingga basis dari Γ^1 dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\partial_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Untuk memperoleh $Z_1(\Gamma^1)$, akan dicari $\ker \partial_1$ dengan menyelesaikan persamaan

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

yang memberikan

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Karena $Z_1(\Gamma^1) = 0, B_1(\Gamma^1) = 0$, akibatnya

$$H_1(\Gamma^1) \cong 0.$$

Selanjutnya akan dihitung $H_0(\Gamma^1)$. Pertama-tama, amati bahwa tidak ada solusi untuk persamaan

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ini berimplikasi bahwa $\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} \notin B_0(\Gamma^1)$. Dengan cara lain,

$$\begin{aligned}
\partial(\widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[0]}) &= -\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]}, \\
\partial(\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]}) &= -\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}. \\
\partial(-\widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]}) &= -\partial(\widehat{[0,1]} \diamond \widehat{[1]}) + \partial(\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0,1]}) \\
&= -(-\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}) - \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} \\
&= \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} - \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]} - \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} \\
&= -\widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]} + \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]}.
\end{aligned}$$

Maka

$$\left\{ \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} - \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]}, \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} - \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}, \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]} - \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} \right\} \subset B_0(\Gamma^1).$$

Khususnya, semua rantai-rantai dasar bersifat *homologous*, sehingga

$$\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} \sim \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} \sim \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}.$$

Selanjutnya, misalkan sebarang rantai $z \in C_0(\Gamma^1)$. Maka

$$z = \alpha_1 \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \alpha_2 \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} + \alpha_3 \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]}.$$

Sehingga pada tingkat homologi,

$$\begin{aligned}
[z]_{\Gamma^1} &= \left[\alpha_1 \widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} + \alpha_2 \widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} + \alpha_3 \widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]} \right]_{\Gamma^1} \\
&= \alpha_1 \left[\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} \right]_{\Gamma^1} + \alpha_2 \left[\widehat{[0]} \diamond \widehat{[1]} \right]_{\Gamma^1} + \alpha_3 \left[\widehat{[1]} \diamond \widehat{[0]} \right]_{\Gamma^1} \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \left[\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]} \right]_{\Gamma^1}.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, setiap anggota dari $H_0(\Gamma^1) = Z_0(\Gamma^1)/B_0(\Gamma^1)$ dibangun oleh $\widehat{[0]} \diamond \widehat{[0]}$, dan karenanya dim$H_0(\Gamma^1) = 1$. Lebih khusus,

$$H_k(\Gamma^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{jika } k = 0, 1, \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

3. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Admi Nazra, Ibu Dr. Yanita, Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si, dan Bapak Budi Rudianto, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Kaczynski. T, K. Mischaikow, M. Mrozek. 2004. *Computational Homology*. Springer-Verlag New York.