Jurnal Matematika UNAND
Vol. **12** No. **3** Hal. 293 – 298
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

DUAL KÖTHE-TOEPLITZ UNTUK RUANG BARISAN VEKTOR

MIZAN AHMAD
Universitas Nahdlatul Ulama Al Ghazali Cilacap
email : mizan.ahmad36@gmail.com

Diterima 25 Maret 2023 Direvisi 9 Mei 2023 Dipublikasikan 21 Oktober 2023

Abstrak. Pada tulisan ini dibahas mengenai beberapa kelas ruang barisan vektor pada $\omega(\mathbb{R}^n)$. Diselidiki kelengkapan masing-masing kelas dan hubungan antar kelas. Pada akhir tulisan ini, dikonstruksikan dual Köthe-Toeplitz dari beberapa ruang barisan vektor.

Abstract. *In this paper we discuss about some classes of vector sequence spaces on $\omega(\mathbb{R}^n)$. We observe their completeness and the relationships between them. At the end of this paper, we construct the Köthe-Toeplitz dual of some vector sequence spaces.*

Kata Kunci: Ruang bernorma, barisan vektor, dual Köthe-Toeplitz

1. Pendahuluan

Diberikan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dan $\omega(\mathbb{R}^n) = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ \text{untuk } i = 1, 2, \cdots, n\}$. Beberapa ruang barisan yang sudah dikenal di antaranya ruang barisan terbatas, ruang barisan p-*absolutely summable*, ruang barisan *absolutely summable*, ruang barisan konvergen, ruang barisan konvergen ke nol, dan ruang barisan Cesaro.

Diberikan l_∞, c, c_0 masing-masing ruang barisan bilangan kompleks terbatas, konvergen, dan konvergen ke nol. Kizmaz [1] mendefinisikan ruang barisan

$$\begin{aligned} l_\infty(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in l_\infty\}, \\ c(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}, \\ c_0(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}. \end{aligned}$$

Shiue [2] mengenalkan ruang barisan Cesaro

$$Ces_p = \{\bar{x} = (x_k) : \| x \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \le p < \infty\}, \text{ dan}$$

$$Ces_\infty = \{\bar{x} = (x_k) : \| x \|_\infty = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| < \infty\}.$$

Hasilnya, $l_p \subset Ces_p (1 < p < \infty)$. Ng dan Lee [3] mendefinisikan dan meneliti ruang barisan

$$X_p = \{\bar{x} = (x_k) : \| x \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty\}, \text{ dan}$$

$$X_\infty = \{\bar{x} = (x_k) : \| x \|_\infty = \sup_n |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k| < \infty\},$$

didapatkan $Ces_p \subset X_p, 1 \leq p < \infty$.

Lebih lanjut, Orhan [4] mendefinisikan dan meneliti ruang barisan selisih $X_p(\Delta), X_\infty(\Delta), O_\infty(\Delta)$ dan $O_p(\Delta)$ dengan $\Delta x = \Delta(x_k) = (x_k - x_{k+1}), k = 1, 2, \cdots$. Dari penelitian tersebut disimpulkan $Z \subset Z(\Delta)$, untuk $Z = X_p, X_\infty, O_p, O_\infty$, dengan $1 \leq p < \infty$. Selanjutnya, Et [5] mendefinisikan ruang barisan $C_p(\Delta^m)$ dan $C_\infty(\Delta^m)$ dengan

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v},$$

untuk $m \in \mathbb{N}$ dan diperoleh $C_p(\Delta^{m-1}) \subset C_p(\Delta^m)$ dan $C_p(\Delta^m) \subset C_q(\Delta^m)$, untuk $1 \leq p < q < \infty$. Lebih lanjut, Ahmad [6] mendefinisikan ruang barisan selisih diperumum Cesaro $Z(\Delta_g^m)$ untuk $Z = l_p, C_p, C_\infty, O_p, O_\infty$ dengan

$$\Delta_g^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} g_{k+v}.$$

untuk suatu $g = (g_k)$ barisan bilangan real tak nol. Dari penelitian tersebut diperoleh bahwa $Z(\Delta_g^i) \subset Z(\Delta_g^m)$, untuk $i = 1, 2, \cdots, m-1$.

Diberikan X ruang barisan bilangan real, ruang bernorma $(X, \| \cdot \|)$ disebut ruang BK jika $(X, \| \cdot \|)$ merupakan ruang Banach dan untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, fungsi $P_k : X \to \mathbb{R}$ dengan definisi $P_k(x) = x_k$, dengan $x = (x_k)$ merupakan fungsi kontinu.

Penelitian terkait dual barisan dapat dilihat dalam Garling [7]. Pada tulisan ini dikenalkan ruang dual Köthe-Toeplitz dari ruang barisan E dinotasikan $[E]^\alpha$ dengan $[E]^\alpha = \{y = (y_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty, \text{ untuk setiap } x = (x_k) \in E\}$. Penelitian terkait dual Köthe-Toeplitz dari suatu ruang barisan dapat dilihat dalam Kizmaz [1], Et [5], Et dan Çolak [8], serta A. H. Ganie dkk. [9].

Konsep norma kemudian dikembangkan oleh Gahler [10] dengan mendefinisikan norma-2 sebagai perluasan konsep norma. Lebih lanjut, Gahler [11] mengenalkan norma-n, untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Penelitian terkait ruang bernorma-n dapat ditemukan dalam Misiak [12], Gozali dkk. [13], Gunawan [14], serta Gunawan dan Mashadi [15].

Konsep dual Köthe-Toeplitz dari suatu ruang barisan kemudian dikembangkan oleh Dutta [16] yang mendefinisikan dual Köthe-Toeplitz dari $\omega(E)$ ruang barisan bernorma-n. Lebih lanjut, Dutta [16], Dutta [17] serta Ahmad dan Aspriyani [18] mengkonstruksi dual Köthe-Toeplitz dari suatu ruang kelas barisan pada ruang berenorma-n.

Pada tulisan ini, didefinisikan ruang barisan pada ruang $\omega(\mathbb{R}^n)$ dan dikonstruksikan dual Köthe-Toeplitz untuk barisan tersebut.

2. Ruang Barisan pada $\omega(\mathbb{R}^n)$

Berikut ini didefinisikan beberapa kelas barisan selisih Cesaro di dalam ruang bernorma-n.

Definisi 2.1. *Diberikan $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ruang Banach dan $\omega(\mathbb{R}^n)$ koleksi semua barisan vektor pada $\mathbb{R}^n$, untuk $1 \leq p < \infty$ didefinisikan*

$$c^n = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}^n) : (x_k) \textit{ konvergen}\},$$
$$c_0^n = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}^n) : (x_k) \textit{ konvergen ke } \mathbf{0}\},$$
$$l_\infty^n = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}^n) : \sup_k \| x_k \| < \infty\}.$$

Dari definisi tersebut diperoleh kelengkapan dari masing-masing ruang barisan adalah sebagai berikut.

Teorema 2.2. *Diberikan $n \in \mathbb{N}$. Ruang $Z = c^n, c_0^n, l_\infty^n$ merupakan ruang bernorma yang didefinisikan sebagai berikut*

$$\| x \|_Z = \sup_k \| x_k \| .$$

Bukti. Ditunjukkan untuk $Z = l_\infty^n$. Untuk ruang yang lain, bukti menggunakan teknik yang sama. Diambil sebarang $x, y \in l_\infty^n$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) $\| x \|_Z = \sup_k \| x_k \| \geq 0$.
(2) $\| x \|_Z = 0 \Leftrightarrow \sup_k \| x_k \| = 0 \Leftrightarrow \| x_k \| = 0 \Leftrightarrow x_k = \mathbf{0}$.
(3) $\| \alpha x \|_Z = \sup_k \| \alpha x_k \| = |\alpha| \sup_k \| x_k \| = |\alpha| \| x \|_Z$.
(4) $\| x + y \|_Z = \sup_k \| x_k + y_k \| \leq \sup_k \| x_k \| + \sup_k \| y_k \| = \| x \|_Z + \| y \|_Z$.

Dengan demikian didapatkan bahwa $(Z, \|\cdot\|_Z)$ merupakan ruang bernorma. □

Teorema 2.3. *Diberikan $n \in \mathbb{N}$. Ruang $(Z, \|\cdot\|_Z)$, dengan $Z = c^n, c_0^n, l_\infty^n$ merupakan ruang Banach.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.2, telah ditunjukkan bahwa $(Z, \|\cdot\|_Z)$, dengan $Z = c^n, c_0^n, l_\infty^n$ merupakan ruang bernorma. Selanjutnya, ditunjukkan $(Z, \|\cdot\|_Z)$ ruang Banach.

Ditunjukkan untuk l_∞^n. Untuk ruang yang lain, bukti menggunakan teknik yang sama. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan $(x^s) = ((x_1^s, x_2^s, \cdots, x_n^s))$ barisan Cauchy di dalam l_∞^n, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga untuk setiap $s, t \geq n_0$ dan $k = 1, 2, \cdots, n$ berlaku:

$$\| x^s - x^t \|_{l_\infty^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \sup_k \| x_k^s - x_k^t \| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Akibatnya, untuk setiap $s, t \geq n_0$ dan $k = 1, 2, \cdots, n$ berlaku

$$\| x_k^s - x_k^t \| < \varepsilon.$$

Dengan demikian untuk setiap $k = 1, \cdots, n$, $(x_k^s)_{s=1}^\infty$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$. Dengan demikian barisan $(x_k^s)_{s=1}^\infty$ konvergen, katakan ke $x_k \in \mathbb{R}^n$, untuk $k = 1, \cdots, n$. Dengan kata lain,

$$\lim_{s\to\infty} x_k^s = x_k, \text{ untuk } k = 1, \cdots, n. \tag{2.2}$$

Dibentuk $x = (x_k)$, untuk setiap $k = 1, \cdots, n$. Akan ditunjukkan bahwa $x \in l_\infty^n$. Untuk setiap $s \geq n_0$ berlaku

$$\begin{aligned} \| x_k \| &= \| x_k - x_k^s + x_k^s \|, \\ \| x_k \| &\leq \| x_k - x_k^s \| + \| x_k^s \|, \\ \sup_k \| x_k \| &\leq \sup_k \| x_k - x_k^s \| + \sup_k \| x_k^s \| < \infty. \end{aligned}$$

Jadi, $x \in l_\infty^n$. Selanjutnya, berdasarkan Persamaan 2.1 dan Persamaan 2.2, untuk setiap $s \geq n_0$ berlaku:

$$\| x^s - x \|_{l_\infty^n} = \sup_k \| x_k^s - x_k \| = \sup_k \| x_k^s - \lim_{t\to\infty} x_k^t \| = \lim_{t\to\infty} \sup_k \| x_k^s - x_k^t \| < \varepsilon.$$

Dengan demikian, l_∞^n ruang Banach terhadap norma $\| \cdot \|_{l_\infty^n}$. □

Lebih lanjut, diperoleh teorema berikut.

Teorema 2.4. *Ruang Z merupakan ruang BK, dengan $Z = c^n, c_0^n, l_\infty^n$.*

Bukti. Ditunjukkan untuk $Z = l_\infty^n$. Untuk kelas yang lain, bukti menggunakan teknik yang sama.

Diambil sebarang barisan (x^s) yang konvergen, maka terdapat $x \in l_\infty^n$ sedemikian sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} &\| x^s - x \|_{l_\infty^n} \to 0, \text{ untuk } s \to \infty, \\ \Leftrightarrow &\sup_k \| x_k^s - x_k \| \to 0, \text{ untuk } s \to \infty, \\ \Rightarrow &\| x_k^s - x_k \| \to 0, \text{ untuk } s \to \infty \text{ dan } k = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

Dengan kata lain,

$$\lim_{s\to\infty} x_k^s = x_k \text{ untuk } k = 1, 2, \cdots, n.$$

Jadi, l_∞^n merupakan ruang BK. □

Berikut hubungan antar ruang barisan.

Teorema 2.5. *Ruang $c_0^n \subset c^n \subset l_\infty^n$.*

Bukti. Jelas bahwa $c_0^n \subset c^n$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $c^n \subset l_\infty^n$.

Diambil sebarang $x = (x_k) \in c^n$, maka ada $M > 0$ sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} &\| x_k^s - x_k \| < M, \text{ untuk setiap } k = 1, 2, \cdots, n, \\ \Rightarrow &\sup_k \| x_k^s - x_k \| < M < \infty. \end{aligned}$$

Jadi, $x = (x_k) \in l_\infty^n$. Dengan demikian $c^n \subset l_\infty^n$. □

3. Dual Köthe-Toeplitz

Diberikan E ruang bernorma-n, $Z(E)$ ruang barisan dengan setiap elemen barisannya anggota E dan E^* himpunan semua fungsional linear kontinu pada E dinotasikan E^*. Dutta [16] mendefinisikan dual Köthe-Toeplitz dari ruang barisan $Z(E)$, yaitu:

$$\begin{aligned}[Z(E)]^\alpha = &\{(y_k) : y_k \in E^*, k \in \mathbb{N} \text{ dan } \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k, u_2, \cdots, u_n \|_E \ \| y_k, v_2, \cdots, v_n \|_{E^*} < \infty, \\ &\text{untuk setiap } u_2, \cdots, u_n \in E, v_2, \cdots, v_n \in E^*, (x_k) \in Z(E)\}.\end{aligned}$$

Berdasarkan hal tersebut, maka untuk suatu X ruang barisan bernorma-n, dengan $n = 1$ didefinisikan:

$$[Z(X)]^\alpha = \{(y_k) : y_k \in X^*, k \in \mathbb{N} \text{ dan } \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|_X \ \| y_k \|_{X^*} < \infty\}.$$

Selanjutnya, untuk $\mathbb{R}^n = X$ didapatkan $X^* = \mathbb{R}^n$, maka didefinisikan

$$U = \{a = (a_k) : a_k \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{\infty} \| a_k \| < \infty\}.$$

Teorema 3.1. $[c^n]^\alpha = [l_\infty^n]^\alpha = U.$

Bukti. Ditunjukkan untuk $[l_\infty^n]^\alpha = U$. Untuk yang lain yaitu $[c^n]^\alpha = U$, bukti menggunakan metode yang sama.

Misalkan $\mathbb{R}^n = Z$. Jika $a \in U$ maka $\sum_{k=1}^{\infty} \| a_k \| < \infty$, artinya ada $M_1 > 0$ sehingga berlaku $\sum_{k=1}^{\infty} \| a_k \| < M_1$. Diambil sebarang $x \in l_\infty^n$, maka ada M_2 sehingga $\| x_k \| < M_2$. Dengan demikian berlaku:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \| a_k \| \| x_k \| &< \sum_{k=1}^{\infty} \| a_k \| M_2 \\ &< M_1 M_2 \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Jadi, $a \in [l_\infty^n]^\alpha$.

Selanjutnya, jika $a \in [l_\infty^n]^\alpha$, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| \| a_k \| < \infty.$$

Dibentuk barisan $x = (x_k)$ dengan

$$x_k = \mathbf{1}, \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}.$$

Dengan demikian didapatkan $x \in l_\infty^n$. Akibatnya, diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| a_k \| = \sum_{k=1}^{\infty} \| a_k \| \| x_k \| < \infty.$$

Dengan demikian, $a \in U$. □

4. Kesimpulan

Pada tulisan ini dikonstruksikan dual Köthe-Toeplitz untuk c^n, dan l_∞^n. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk mengkonstruksikan dual Köthe-Toeplitz untuk kelas yang lain.

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada penilai yang telah memberikan saran.

Daftar Pustaka

[1] Kizmaz, H., 1981, On Certain Sequence Spaces, *Soochow J. Math.* **24**: 169 – 176

[2] Shiue, J.S., 1970: On The Cesaro Sequence Spaces, *Thamkang J. Math.* **1**: 19 – 25

[3] Ng, PN. and Lee, P.Y., 1978, Cesaro Sequence Spaces of Non Absolute Type, *Comment. Math.* **20**: 429 – 433

[4] Orhan, C., 1983, Cesaro Difference Sequence Spaces and Related Matrix Transformations, *Commun. Fac. Sci.Univ. Ankara, Ser. A.* **32**: 55 – 63

[5] Et, M., 1996-1997, On Some Generalized Cesaro Difference Sequence Spaces, *Istanbul Univ. Fen Fak. Mat. Dergrisi* **55-56**: 221 – 229

[6] Ahmad, M., 2022, Beberapa Kelas Barisan Selisih Diperumum Tipe Cesaro, *JFMA* **5(01)**: 23 – 34

[7] Garling, D.J.H., 1967, The β- and γ-duality of Sequence Spaces, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **63**: 963

[8] Et, M. dan Çolak, R., 1995, On Some Generalized Diffeerence Sequence Spaces, *Soochow J. Math.* **21**: 377 – 386

[9] A. H. Ganie, S. A. Lone, dan A. Afroza, 2020, Generalised Difference Sequence Spaces of Non-absolute Type, *EKSAKTA* **11(02)**: 147 – 153

[10] Gähler, S., 1964, Lineare 2-Normierte Räume, *Math. Nachr.* **28**: 1 – 43

[11] Gähler, S., 1969, Untersuchungen Über Verallgemeinerte m-Metrische Räume. I, *Math. Nachr.* **40**: 165 – 189

[12] Misiak, A., 1989, n-Inner Product Spaces, *Math. Nachr.* **140**: 299 – 319

[13] Gozali, S.H., Gunawan, H., dan Neswan, O., 2000, On n-Norms, and Bounded n-Linear Functionals in a Hilbert Space, *Mathematics Subject Classification* **5**: 47 – 54

[14] Gunawan, H., 2000, On n-Inner Product, n-Norms, and The Cauchy-Schwarz Inequality, *Scientiae Mathematicae Japanicae Online* **5**: 47 – 54

[15] Gunawan, H. dan Mashadi, M., 2001, On n-Normed Spaces, *Int. J. Math. Sci.* **27**: 631 – 639

[16] Dutta, H., 2013, Some Classes of Cesaro-Type Difference Sequence Over n-Normed Spaces, *Advances in Difference Equations* **1**: 286

[17] Dutta, H., 2015, Kothe-Toeplitz Duals of Some n-Normed Valued Difference Sequence Spaces, *Maejo Int. J. Sci. Technol* **9(02)**: 255 – 264

[18] Ahmad, M. dan Aspriyani, R., 2022, Ruang Barisan Selisih Diperumum Tipe Cesaro pada Ruang Bernorma-n, *JFMA* **5(02)**: 21 – 34