Jurnal Matematika UNAND
Vol. **1** No. **1** Hal. 30 – 33
ISSN : 2303–291X

KAJIAN BILANGAN RAMSEY SISI UNTUK PASANGAN GRAF LINTASAN P_3 DAN GRAF PERTEMANAN C_3^t

ANGGUN DINIE HARY D.

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas Padang,
Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163, Indonesia
anggun_dinihari@yahoo.com

Abstrak. Misal diberikan graf G dan H. Notasi $F \to (G, H)$ menyatakan sebarang 2-pewarnaan (misalkan merah dan biru) pada semua sisi graf F akan mengakibatkan F memuat subgraf G merah atau memuat subgraf H biru. Bilangan Ramsey sisi $\widehat{r}(G, H)$ adalah minimum dari banyaknya sisi graf F yang bersifat $F \to (G, H)$ dan $F - e \to (G, H)$ untuk setiap sisi e di F. Dalam makalah ini akan dibahas tentang bilangan Ramsey Sisi $\widehat{r}(P_3, C_3^t)$ dimana P_3 adalah lintasan dengan tiga titik dan C_3^t dalah graf pertemanan dengan $3t$ sisi untuk $t \geq 1$.
Kata kunci: *Graf Ramsey sisi, graf lintasan, graf pertemanan*

1 Pendahuluan

Suatu graf $G = (V(G), E(G)) = (V, E)$ adalah pasangan terurut dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Anggota $V(G)$ adalah titik-titik pada graf G, sementara anggota $E(G)$ adalah sisi-sisi yang menghubungkan dua titik. Banyaknya titik yang ada pada graf G adalah $|V(G)| = p(G) = p$ dan disebut **orde** dari G, sedangkan banyak sisi pada graf G adalah $|E(G)| = q(G) = q$ dan disebut **ukuran** dari G.

Pada suatu graf, dua titik dikatakan **bertetangga (*adjacent*)** jika keduanya dihubungkan oleh satu sisi. Untuk sebarang sisi $e = uv$, sisi e dikatakan **terkait** dengan titik u dan titik v. Dalam hal ini u dan v dikatakan titik ujung dari e.

Derajat (*degree*) dari titik v pada graf G adalah banyaknya titik yang bertetangga dengan v. Jika titik v berderajat nol, yang berarti v tidak bertetangga dengan semua titik di G, maka v disebut titik **terisolasi** *(isolated vertex)*. Derajat terkecil dari suatu graf G dinyatakan dengan $\delta = \delta(G) = \min_{v \epsilon V} d(v)$ dan derajat terbesar dinyatakan sebagai $\Delta = \Delta(G) = \max_{v \epsilon V} d(v)$. Jika $\delta = \Delta = r$, maka graf G disebut sebagai **graf regular berderajat** r *(r-regular graph)*.

Salah satu kajian dalam matematika kombinatorika yang mendasari munculnya teori Ramsey adalah *Prinsip Pigeonhole*. Jika $k + 1$ objek termuat dalam k kotak, maka akan terdapat paling sedikit satu kotak yang memuat dua objek atau lebih. Keterkaitan prinsip ini dapat diilustrasikan dengan contoh sebagai berikut.

> Jika sebuah grup terdiri dari atas enam orang dan setiap orang dalam grup tersebut mempunyai teman dan musuh, maka akan selalu terdapat tiga orang yang saling berteman atau tiga orang yang saling bermusuhan tetapi tidak sekaligus keduanya.

Adapun definisi bilangan Ramsey secara umum adalah sebagai berikut:

Definisi 1. *Diberikan dua graf G dan H. Bilangan Ramsey graf $R(G,H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga setiap graf F dengan n titik akan memuat G atau $\overline{F}$ memuat H.*

Definisi 2. *Diberikan graf G dan H. Bilangan Ramsey sisi $\widehat{r}(G,H)$ didefinisikan sebagai $\widehat{r}(G,H) = \min\{q(F)|F \rightarrow (G,H)$ dan $F - e \nrightarrow (G,H)\}$.*

Definisi 3. *Diberikan graf G dan H. Graf F dikatakan sebagai graf Ramsey (G,H) minimal jika:*

1. *$F \rightarrow (G,H)$,*
2. *$F - e \not\rightarrow (G,H)$ untuk sebarang sisi e di F.*

Kelas yang memuat semua graf Ramsey (G,H)-minimal dinotasikan dengan $\mathcal{R}(G,H)$.

Graf lintasan P_n dengan n titik adalah graf dengan dua titik ujung berderajat satu, dan $n-1$ titik berderajat dua. Graf siklus $C_n, n \geq 2$ adalah graf terhubung dimana setiap titiknya berderajat dua. Graf roda $W_m, m \geq 3$ diperoleh dengan cara menambahkan satu titik, namakan x, yang bertetangga dengan semua titik di C_m. Titik x disebut sebagai titik pusat graf roda. Graf Kipas f_n, $n \geq 2$, adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n dengan satu titik c yang bukan anggota dari $V(P_n)$. Titik c disebut sebagai *titik pusat*. Misalkan terdapat graf $tK_2, t \geq 1$, yaitu graf yang terdiri dari t buah sisi yang saling lepas. Graf pertemanan C_3^t diperoleh dengan menghubungkan semua titik di tK_2 ke satu titik lain, namakan c, yang berada di luar graf tersebut. Makalah ini merupakan kajian ulang atas rujukan [1] yang membahas tentang penentuan bilangan Ramsey sisi untuk pasangan graf lintasan P_3 dengan graf pertemanan $C_3^t, t \geq 1$.

2 Batas Atas $\widehat{r}(P_3, C_3^t)$ untuk $t \geq 1$

Teorema 1. *Untuk setiap $t \geq 1$, $\widehat{r}(P_3, C_3^t) \leq 6t + 2$.*

Bukti. Perhatikan pewarnaan merah-biru sebarang pada sisi-sisi graf roda W_{3t+1} yang mempunyai $6t + 2$ sisi. Misalkan W_{3t+1} adalah graf roda dengan jari-jari sebanyak $3t + 1$, dimana

$$\begin{aligned} V(W_{3t+1}) &= \{c\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq 3t + 1\}, \\ E(W_{3t+1}) &= E_1 \cup E_2, \\ E_1 &= \{cv_i | 1 \leq i \leq 3t + 1\} \\ E_2 &= \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 3t + 1\} \cup \{v_{3t+1} v_1\}. \end{aligned}$$

Misalkan $\mathfrak{X}$ adalah 2-pewarnaan sebarang terhadap W_{3t+1} sehingga pewarnaan tersebut tidak memuat P_3 merah. Akan ditunjukkan bahwa $\mathfrak{X}$ memuat C_3^t biru. Untuk membuktikannya, perhatikan dua kasus di bawah ini.

Kasus 1. Terdapat satu sisi merah di E_1.
Tanpa mengurangi perumuman, misalkan cv_1 pada E_1 berwarna merah. Akibatnya tidak ada sisi lain di E_1 yang berwarna merah (sesuai pengandaian bahwa

tidak ada P_3 merah). Perhatikan subgraf $W_{3t+1} - v_1$. Maka subgraf tersebut adalah graf kipas $\{c\} + P_{3t}$. Pada E_2 terdapat paling banyak $\lfloor \frac{3t}{2} \rfloor$ sisi merah. Maka akan didapatkan paling sedikit t buah sisi biru di E_2. Akibatnya W_{3t+1} memuat C_3^t biru.

Kasus 2. Tidak terdapat sisi merah di E_1.
Jika sisi merah hanya terdapat pada E_2, maka terdapat paling banyak $\lfloor \frac{3(t)+1}{2} \rfloor$ sisi merah sementara sisi lainnya pastilah biru. Karena W_{3t+1} tidak memuat P_3 merah, maka berapapun sisi merah yang ada di E_2 mengakibatkan W_{3t+1} memuat C_3^t biru.

Dari kedua kasus tersebut diperoleh bahwa $\hat{r}(P_3, C_3^t) \leq 6t + 2$, untuk semua $t \geq 1$.

3 Anggota $\mathcal{R}(P_3, C_3^t)$ untuk $t \geq 1$

Pada teorema berikut akan ditunjukkan bahwa graf roda W_{3t+1} dengan $6t + 2$ sisi berada dalam kelas graf Ramsey minimal untuk pasangan (P_3, C_3^t).

Teorema 2. *Untuk setiap $t \geq 1$, W_{3t+1} berada pada $\mathcal{R}(P_3, C_3^t)$.*

Bukti. Syarat 1 pada Definisi 3, yakni bahwa $W_{3t+1} \rightarrow (P_3, C_3^t)$ telah ditunjukkan pada Teorema 1. Pada bagian ini cukup ditunjukkan bahwa $W_{3t+1} - \{e\} \not\rightarrow (P_3, C_3^t)$ untuk sebarang sisi e di $E(W_{3t+1})$.

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap sisi di $E(W_{3t+1} - e)$, terdapat 2-pewarnaan sebarang terhadap $F \cong W_{3t+1} - e$, sehingga graf F tersebut tidak memuat P_3 merah dan C_3^t biru. Sebelum menghapus sisi e beri label pada titik dan sisi graf W_{3t+1} seperti pada teorema sebelumnya. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 3. $e \in E_1$
Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = cv_1$. Jika $t = 1$, warnai sisi cv_3 dengan warna merah dan sisi lain dengan warna biru. Sehingga $W_4 \setminus \{cv_1\}$ tidak memuat P_3 merah dan C_3^t biru. Jika $t \geq 2$, misalkan

$$\begin{aligned} E_3 &= \{v_{3t+1}v_1, v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5, v_{3t-1}v_{3t}\} \cup \{E_1 \backslash cv_4\}, \\ E_4 &= \{cv_4, v_{3t}v_{3t+1}, v_2v_3\}, \\ E_5 &= E(F) \backslash (E_3 \cup E_4) \end{aligned}$$

Warnai sisi-sisi pada E_3 dengan warna biru dan sisi-sisi pada E_4 dengan warna merah. Kemudian sisi-sisi pada E_5 diwarnai dengan dua biru dan satu merah berurutan. Sehingga pada dua pewarnaan ini, graf F tidak memuat P_3 merah dan C_3^t biru.

Kasus 4. $e \in E_2$.
Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = v_1v_2$. Pada kasus ini, graf F adalah graf kipas $\{c\} + P_{3t+1}$. Misalkan :

$$\begin{aligned} E_6 &= \{v_{3t+1}v_1, cv_3\}, \\ E_7 &= \{v_2v_3, v_3v_4\} \cup \{E_1 \backslash cv_3\}, \\ E_8 &= E(F) \backslash (E_6 \cup E_7). \end{aligned}$$

Warnai sisi-sisi pada E_6 dengan warna merah dan sisi-sisi pada E_7 dengan warna biru. Kemudian warnai sisi-sisi pada E_8 dengan dua biru dan satu merah berurutan mulai dari sisi $v_{3t+1}v_{3t}$. Akibatnya graf kipas F tidak mengandung P_3 merah dan C_3^t biru.

Dari kedua kasus di atas diperoleh bahwa $F \cong W_{3t+1} - \{e\}$ untuk sebarang e di W_{3t+1} tidak memuat P_3 merah dan C_3^t biru.

4 Kesimpulan

Misalkan diberikan graf G dan H. Notasi $F \to (G, H)$ menyatakan bahwa pada sebarang 2-pewarnaan (misalkan merah dan biru) terhadap sisi-sisi graf F mengakibatkan F memuat subgraf G merah atau memuat subgraf H biru. Bilangan Ramsey sisi $\widehat{r}(G, H)$ adalah banyaknya sisi minimum yang dipunyai graf F sedemikian sehingga $F \to (G, H)$ dan $F - e \nrightarrow (G, H)$ untuk setiap sisi e di F. Pada tulisan ini telah dikaji kembali bilangan Ramsey sisi untuk pasangan graf lintasan P_3 dan graf pertemanan C_3^t terbatas di atas oleh banyaknya sisi pada graf Roda W_{3t+1}, yaitu $6t + 2$. Selanjutnya telah dikaji kembali bahwa graf Roda W_{3t+1} merupakan salah satu anggota dari kelas Ramsey (P_3, C_3^t)-minimal, untuk $t \geq 1$.

5 Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Lyra Yulianti, Bapak Syafrizal Sy, Bapak Admi Nazra dan Bapak Efendi yang telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan penulisan sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

6 Daftar Pustaka

1. E.T Baskoro, A.A.G, Ngurah and Y. Nuraeni. 2006. The Upper bound for the size Ramsey numbers for P_3 versus C_3^t or P_n. *Journal of Prime research in Mathematics* **2**(2006) : 141 – 146
2. Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. 1976. **Graph Theory with Applications**. London: The Macmillan Press Ltd
3. Radziszowski, P. Stanislaw. 2011. Small Ramsey Number. *The Electronics Journal of Combinatorics*, DS 1.13
4. Surahmat. 2003. Bilangan Ramsey untuk Graf Roda. Disertasi. tidak diterbitkan. ITB Bandung
5. Hasmawati. 2007. Bilangan Ramsey untuk Graf Gabungan Bintang. tidak diterbitkan. ITB Bandung