STRUKTUR SEMILATTICE PADA PRA A^* -ALJABAR

ROZA ARDILLA

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 rozaardilla@gmail.com*

Abstrak. Dalam tulisan ini dipelajari tentang struktur semilattice pada Pra A^* -Aljabar $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^\sim)$ yang dituliskan sebagai $\bar{A}$. Didefinisikan sebuah operasi biner $*$ pada Pra A^* -Aljabar dan ditunjukkan bahwa $(\bar{A}, *)$ adalah sebuah semilattice. Selanjutnya didefinisikan suatu relasi terurut parsial $\leq_*$ dan dibuktikan beberapa sifat pada suatu relasi terurut parsial tersebut yang diinduksi dari struktur semilattice $(\bar{A}, *)$. Di samping itu juga dikaji tentang nilai supremum dan nilai infimum dari beberapa sub himpunan pada semilattice $(\bar{A}, *)$.

Kata Kunci: Pra A^* -Aljabar, poset, semilattice

1. Pendahuluan

Gagasan Pra A^* -Aljabar diperkenalkan pada tahun 2000 oleh Venkateswara Rao. Pra A^* -Aljabar adalah suatu sistem matematika $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^\sim)$ dimana A merupakan himpunan tak kosong dengan $\wedge$ (*meet*) dan $\vee$ (*join*) adalah operasi biner dan $(\cdot)^\sim$ adalah operasi tunggal, jika $\forall x, y, z \in A$ berlaku

1. $x^{\sim\sim} = x$,
2. $x \wedge x = x$,
3. $x \wedge y = y \wedge x$,
4. $(x \wedge y)^\sim = x^\sim \vee y^\sim$,
5. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,
6. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
7. $x \wedge y = x \wedge (x^\sim \vee y)$.

Tulisan ini difokuskan pada struktur *semilattice* pada Pra A^* -Aljabar. Suatu himpunan tak kosong A dengan sebuah operasi biner " $*$ " pada A dinamakan sebuah *semilattice* jika elemen-elemennya memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

1. $x^*x = x, \forall x \in A$ (disebut sifat idempoten),
2. $x^*y = y^*x, \forall x, y \in A$ (disebut sifat komutatif),
3. $x^*(y^*z) = (x^*y)^*z, \forall x, y, z \in A$ (disebut sifat asosiatif).

Artikel ini bertujuan untuk mendefinisikan sebuah operasi biner " $*$ " pada Pra A^* -Aljabar $\bar{A}$ dan menunjukkan bahwa $(\bar{A}, *)$ adalah sebuah semilattice. Kemudian akan dikaji sifat-sifat pada suatu relasi terurut parsial " $\leq_*$ " yang diinduksi dari

struktur semilattice $(\bar{A}, *)$. Selanjutnya juga akan ditentukan nilai supremum dari $\{x, x^\sim\}$ dan nilai infimum dari $\{x, y\}$, $\forall x, y \in A$ pada semilattice $(\bar{A}, *)$.

2. Struktur Semilattice pada Pra A^* -Aljabar

Definisi 2.1. [1] Suatu himpunan tak kosong A dengan sebuah operasi biner $*$ disebut sebuah semilattice jika berlaku sifat sebagai berikut :

1. $x^*x = x, \forall x \in A$ (disebut idempoten),
2. $x^*y = y^*x, \forall x, y \in A$ (disebut komutatif),
3. $x^*(y^*z) = (x^*y)^*z, \forall x, y, z \in A$ (disebut asosiatif).

Teorema 2.2. [1] Misalkan $\bar{A} (A, \wedge, \vee, (\cdot)^\sim)$ adalah Pra A^* -Aljabar dan didefinisikan suatu operasi biner $*$ pada $\bar{A}$ yang memenuhi sifat $x^*y = x \wedge y$, untuk setiap $x, y \in A$. Maka $(\bar{A}, *)$ adalah sebuah semilattice.

Bukti. Misalkan $\bar{A}$ adalah suatu Pra A^* -Aljabar. Akan dibuktikan bahwa $(\bar{A}, *)$ adalah sebuah semilattice, yaitu dengan menunjukkan bahwa relasi $*$ bersifat idempoten, komutatif, dan asosiatif.

- (i) Ambil sebarang $x \in A$. Akan ditunjukkan $x^*x = x$. Perhatikan bahwa:

$$x^*x = x \wedge x = x.$$

Jadi $x^*x = x$, maka relasi $*$ adalah idempoten.

- (ii) Ambil sebarang $x, y \in A$. Akan ditunjukkan $x^*y = y^*x$. Perhatikan bahwa:

$$x^*y = x \wedge y = y \wedge x = y^*x.$$

Jadi $x^*y = y^*x$, maka relasi $*$ adalah komutatif.

- (iii) Ambil sebarang $x, y, z \in A$. Akan ditunjukkan $x^*(y^*z) = (x^*y)^*z$. Perhatikan bahwa:

$$x^*(y^*z) = x^*(y \wedge z) = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = (x^*y)^*z.$$

Jadi $x^*(y^*z) = (x^*y)^*z$, maka relasi $*$ adalah asosiatif.

Berdasarkan (i),(ii), dan (iii) maka $(\bar{A}, *)$ adalah sebuah semilattice. □

Definisi 2.3. [1] Misalkan $\bar{A}$ adalah suatu Pra A^* -Aljabar. Suatu relasi $\leq_*$ didefinisikan sebagai $x \leq_* y$ jika $x^*y = x$.

Teorema 2.4. [1] Untuk setiap $x, y \in A$ pada Pra A^* -Aljabar $\bar{A}$ didefinisikan operasi biner $*$ pada $\bar{A}$ maka berlaku:

1. $x \wedge y \leq_* x$,
2. $x \vee y \leq_* x \vee x^\sim$.

Bukti. Berdasarkan Definisi 2.3 berlaku bahwa $x \leq_* y$ jika dan hanya jika $x^*y = x$.

- (1) Ambil sebarang $x, y \in A$. Akan dibuktikan $x \wedge y \leq_* x$ yaitu dengan menunjukkan $(x \wedge y)^* x = x \wedge y$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} (x \wedge y)^* x &= (x \wedge y) \wedge x, \\ &= x \wedge (y \wedge x), \\ &= x \wedge (x \wedge y), \\ &= (x \wedge x) \wedge y, \\ &= x \wedge y. \end{aligned}$$

Karena $(x \wedge y)^* x = x \wedge y$ maka $x \wedge y \leq_* x$.

- (2) Ambil sebarang $x, y \in A$. Akan dibuktikan bahwa $x \vee y \leq_* x \vee x^\sim$ yaitu dengan menunjukkan $(x \vee y)^* (x \vee x^\sim) = x \vee y$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} (x \vee y)^* (x \vee x^\sim) &= (x \vee y) \wedge (x \vee x^\sim), \\ &= (x \vee y) \wedge 1, \\ &= (x \wedge 1) \vee (y \wedge 1), \\ &= x \vee y. \end{aligned}$$

Karena $(x \vee y)^* (x \vee x^\sim) = x \vee y$ maka $(x \vee y) \leq_* (x \vee x^\sim)$. $\square$

Teorema 2.5. [1] Misalkan $\bar{A}$ suatu Pra A^* -Aljabar. Jika $x \leq_* y$ maka untuk setiap $a \in A$ berlaku :

1. $a \wedge x \leq_* a \wedge y$,
2. $a \vee x \leq_* a \vee y$.

Bukti. Berdasarkan Definisi 2.3, karena $x^* y = x$ maka $x \leq_* y$.

- (1) Ambil sebarang $x, y \in A$. Akan dibuktikan bahwa $a \wedge x \leq_* a \wedge y$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} (a \wedge x)^* (a \wedge y) &= (a \wedge x) \wedge (a \wedge y), \\ &= (a \wedge a) \wedge (x \wedge y), \\ &= a \wedge x. \end{aligned}$$

Karena $(a \wedge x)^* (a \wedge y) = a \wedge x$ maka $a \wedge x \leq_* a \wedge y$.

- (2) Ambil sebarang $x, y \in A$. Akan dibuktikan bahwa $a \vee x \leq_* a \vee y$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} (a \vee x)^* (a \vee y) &= (a \vee x) \wedge (a \vee y), \\ &= (a \wedge a) \vee (x \wedge y), \\ &= a \vee (x \wedge y), \\ &= a \vee x. \end{aligned}$$

Karena $(a \vee x)^* (a \vee y) = a \vee x$ maka $a \vee x \leq_* a \vee y$. $\square$

Proposisi 2.6. [1] Misalkan $\bar{A}$ adalah Pra A^* -Aljabar. Definisikan suatu operasi biner " $*$ " pada $\bar{A}$. Maka untuk setiap $x, y \in A$, operasi " $*$ " adalah distributif atas $\wedge$ dan $\vee$, artinya

1. $x^*(y \vee z) = (x^*y) \vee (x^*z)$,
2. $x^*(y \wedge z) = (x^*y) \wedge (x^*z)$.

Bukti.

- (1) Ambil sebarang $x, y, z \in A$. Akan dibuktikan $x^*(y \vee z) = (x^*y) \vee (x^*z)$. Perhatikan bahwa:

$$x^*(y \vee z) = x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x^*y) \vee (x^*z).$$

- (2) Ambil sebarang $x, y, z \in A$. Akan dibuktikan $x^*(y \wedge z) = (x^*y) \wedge (x^*z)$. Perhatikan bahwa:

$$x^*(y \wedge z) = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge (x \wedge z) = (x^*y) \wedge (x^*z). \quad \square$$

Teorema 2.7. [1] Misalkan $\bar{A}$ suatu Pra A^* -Aljabar. Untuk setiap $x \in A$, maka $x \vee x^\sim$ adalah supremum dari $\{x, x^\sim\}$ pada semilattice $(\bar{A}, *)$.

Bukti. Misalkan $\bar{A}$ suatu Pra A^* -Aljabar. Akan ditunjukkan bahwa $\sup\{x, x^\sim\} = x \vee x^\sim$ pada semilattice $(\bar{A}, *)$. Ambil sebarang $x \in A$, maka berlaku:

$$x^*(x \vee x^\sim) = x \wedge (x \vee x^\sim) = x \wedge 1 = x.$$

Karena $x^*(x \vee x^\sim) = x$ maka $x \leq_* x \vee x^\sim$.

Kemudian ambil $x^\sim \in A$ maka berlaku:

$$x^\sim * (x \vee x^\sim) = x^\sim \wedge (x \vee x^\sim) = x^\sim \wedge 1 = x^\sim.$$

Karena $x^\sim * (x \vee x^\sim) = x^\sim$ maka $x^\sim \leq_* (x \vee x^\sim)$. Jadi karena $x \leq_* x \vee x^\sim$ dan $x^\sim \leq_* (x \vee x^\sim)$ maka $x \vee x^\sim$ batas atas dari $\{x, x^\sim\}$. Misalkan k adalah batas atas dari $\{x, x^\sim\}$ maka

$$x \leq_* k \Leftrightarrow x^*k = x \text{ dan } x^\sim \leq_* k \Leftrightarrow x^\sim * k = x^\sim.$$

Perhatikan bahwa $(x \vee x^\sim)^*k = x \vee x^\sim$, sehingga $x \vee x^\sim \leq_* k$. Oleh karena itu, $x \vee x^\sim$ merupakan batas atas terkecil dari $\{x, x^\sim\}$. Dengan kata lain, $\sup\{x, x^\sim\} = x \vee x^\sim$. $\square$

Lema 2.8. [1] Misalkan $\bar{A}$ adalah Pra A^* -Aljabar. Untuk setiap $x, y \in A$, jika $x \wedge y \leq_* y$ maka $x \wedge y$ merupakan batas bawah dari $\{x, y\}$.

Bukti. Misalkan $\bar{A}$ adalah Pra A^* -Aljabar. Akan ditunjukkan bahwa $x \wedge y$ merupakan batas bawah dari $\{x, y\}$. Ambil sebarang $x, y \in A$ maka berlaku bahwa

$$(x \wedge y)^*x = x \wedge y \Rightarrow x \wedge y \leq_* x,$$

dan

$$(x \wedge y)^*y = x \wedge y \Rightarrow x \wedge y \leq_* y.$$

Karena $x \wedge y \leq_* x$ dan $x \wedge y \leq_* y$ maka $x \wedge y$ merupakan batas bawah dari $\{x, y\}$. $\square$

Teorema 2.9. [1] Misalkan $\bar{A}$ adalah Pra A^* -Aljabar. Maka untuk setiap $x, y \in A$ berlaku bahwa $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ pada semilattice $(\bar{A}, *)$.

Bukti. Berdasarkan Lema 2.8 diketahui bahwa $x \wedge y$ adalah batas bawah dari $\{x, y\}$. Misalkan m adalah batas bawah dari $\{x, y\}$ maka

$$m \leq_* x \Leftrightarrow m^*x = m \text{ dan } m \leq_* y \Leftrightarrow m^*y = m.$$

Perhatikan bahwa $m^*(x \wedge y) = m$, sehingga $m \leq_* x \wedge y$. Oleh karena itu, $x \wedge y$ merupakan batas bawah terbesar dari $\{x, y\}$. Dengan kata lain, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ $\square$

3. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak . Admi Nazra, Ibu Lyra Yulianti, Bapak Mahdhivan Syafwan dan Ibu Yanita yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Rao, J.V. dan A. Satyanarayana. 2010. *Semilattice Structure on Pre A^* -Algebra*. Asian Journal of Scientific Research, Vol. 3(4).
- [2] Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit*. Edisi Ketiga. Penerbit Informatika Bandung.