PELABELAN TOTAL (a, d) -TITIK ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF PETERSEN YANG DIPERUMUM $P(n, 3)$ DENGAN n GANJIL, $n \geq 7$

IRANISA PERMATA SAHLI

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 iranispermatasahli@yahoo.co.id*

Abstrak. Graf $G = (V, E)$ dikatakan pelabelan pada suatu graf jika terjadi pemetaan bijektif dari setiap elemen graf ke bilangan bulat positif, yang mana bilangan tersebut disebut dengan label. Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Banyak titik di graf G adalah p dan banyak sisi di graf G adalah q . Pelabelan total (a, d) -titik antiajaib adalah pemetaan satu-satu $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot titik dari G , $W = \{w(x) | w(x) = f(x) + \sum f(xy), \forall xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (p - 1)d\}$ dimana $a > 0$, $d \geq 0$. Suatu pelabelan total (a, d) -titik antiajaib dikatakan *super* jika $E(G)$ menerima q label terkecil dengan $E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ dan $V(G) \rightarrow \{q + 1, q + 2, \dots, p + q\}$. Pada makalah ini akan dikaji kembali paper [1] yang membahas tentang pelabelan total (a, d) -titik-antiajaib super pada Graf Petersen yang diperumum $P(n, 3)$, dengan n ganjil, $n \geq 7$.

Kata Kunci: Graf Petersen, pelabelan Total (a, d) -Titik-AntiAjaib Super

1. Pendahuluan

Graf adalah salah satu pokok bahasan matematika diskrit yang telah lama dikenal dan banyak diaplikasikan pada berbagai bidang. Teori graf mengalami perkembangan yang begitu pesat. Salah satu alasan perkembangan teori graf yang begitu pesat adalah aplikasinya yang digunakan untuk menyederhanakan atau menganalisis suatu permasalahan yang ditemui dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu lainnya. Secara umum, graf adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertex*) dan E adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik pada graf tersebut.

Pada teori graf banyak sekali ditemukan macam-macam graf, diantaranya yaitu graf Euler, graf Hamilton dan graf Petersen yang diperumum. Graf Petersen diperumum adalah pengembangan dari graf Petersen. Graf Petersen adalah graf teratur yang mempunyai derajat titik 3 pada semua titiknya. Graf petersen diperumum dinyatakan sebagai $P(n, m)$ dengan nilai n menyatakan banyaknya titik luar (sama dengan banyaknya titik dalam) dan nilai m menyatakan lompatan sisi dalam, dimana $n \geq 3$ dan $1 \leq m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Beberapa topik dalam graf misalnya pewarnaan graf (*graph colouring*), pelabelan graf (*graph labeling*). Salah satu topik dalam graf yang berkembang saat ini

adalah pelabelan graf. Pelabelan graf menjadi salah satu topik yang menarik dan mendapat perhatian karena mod el-mod el yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan graf merupakan pemetaan bijektif yang memetakan unsur himpunan titik atau unsur himpunan sisi ke bilangan bulat positif yang disebut label. Jika domain dari pemetaan adalah titik disebut dengan pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domain dari pemetaan adalah sisi disebut dengan pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika domainnya adalah titik dan sisi maka disebut dengan pelabelan total (*total labeling*).

Jenis-jenis pelabelan pada graf antara lain, pelabelan *graceful*, pelabelan ajaib, pelabelan antiajaib dan pelabelan total tak beraturan. Pelabelan antiajaib pertama kali diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990. Dalam pengembangannya pelabelan antiajaib, dikenal pula pelabelan titik (a, d) -sisi antiajaib, pelabelan sisi (a, d) -titik antiajaib, pelabelan total (a, d) -titik antiajaib, pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib.

Pada makalah ini akan dilakukan pengkajian kembali paper [1] yang membahas tentang pelabelan total (a, d) -titik-antiajaib super pada Graf Petersen yang diperumum $P(n, 3)$, dengan n ganjil, $n \geq 7$.

2. Teori Graf

2.1. Definisi Graf

Suatu graf G adalah pasangan himpunan titik dan sisi yang dapat ditulis dengan notasi $G = \{V(G), E(G)\}$, dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut himpunan titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik dan dinyatakan sebagai pasangan tak-terurut dari titik pada V . Pada sebuah graf G , $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$ boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan untuk tidak memiliki sisi, tetapi harus mempunyai paling sedikit satu buah titik. Banyaknya titik di G pada graf disebut sebagai kardinalitas himpunan titik pada graf, dan dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan banyaknya sisi di G disebut kardinalitas himpunan sisi pada graf, dinotasikan dengan $|E(G)|$.

2.2. Graf Petersen yang Diperumum (Generalized Petersen Graph)

Graf Petersen adalah graf teratur yang mempunyai derajat titik 3 pada semua titiknya. Graf Petersen diperumum dinyatakan sebagai $P(n, m)$ dengan nilai n menyatakan banyaknya titik luar (sama dengan banyaknya titik dalam) dan nilai m menyatakan lompatan sisi dalam, dimana $n \geq 3$ dan $1 \leq m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Graf Petersen diperumum memiliki

$$\begin{aligned} V(P(n, m)) &= \{v_i \mid i = 0, 1, \dots, n-1\} \cup \{u_i \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}, \\ E(P(n, m)) &= \{u_i u_{i+1} \mid i = 0, 1, \dots, n-1\} \cup \{u_i v_i \mid i = 0, 1, \dots, n-1\} \\ &\quad \cup \{v_i v_{i+m} \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}, \end{aligned}$$

dengan indeks merupakan modulo dari n [5]. Ilustrasi Graf Petersen yang diperumum $P(n, 3)$ dapat dilihat pada Gambar 1 berikut.

Gambar 1. Graf Petersen yang diperumum $P(n, 3)$

2.3. Pelabelan total (a, d) -titik anti ajaib

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Banyak titik di graf G adalah p dan banyak sisi di graf G adalah q . Pelabelan total (a, d) -titik antiajaib adalah pemetaan satu-satu $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot titik dari G ,

$$W = \{w(x) \mid w(x) = f(x) + \sum f(xy), \forall xy \in E(G)\},$$

dapat ditulis sebagai

$$W = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (p - 1)d\},$$

dimana $a > 0, d \geq 0$. Suatu pelabelan total (a, d) -titik antiajaib dikatakan *super* jika $E(G)$ menerima q label terkecil dengan $E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ dan $V(G) \rightarrow \{q + 1, q + 2, \dots, p + q\}$.

3. Pembahasan

Teorema 3.1. [1] Untuk n ganjil, $n \geq 7$, Graf Petersen yang diperumum $P(n, 3)$ mempunyai pelabelan total $\left(\frac{15n+5}{2}, 1\right)$ -titik-anti ajaib super.

Bukti. Misalkan $P(n, 3)$ adalah Graf Petersen dengan $|V(P(n, 3))| = 2n$ dan $|E(P(n, 3))| = 3n$. Konstruksikan pelabelan untuk semua titik dan semua sisi dari Graf Petersen yang diperumum $P(n, 3)$ yang terbagi menjadi tiga kasus sebagai berikut.

- Kasus 1. $n \equiv 1 \pmod{6}$.

$$\alpha_1(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{3}(12n - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(10n - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(11n - i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1(v_i) &= \begin{cases} \frac{1}{3}(15n - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(13n - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(14n - i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \\ \alpha_1(u_i u_{i+1}) &= \begin{cases} 2n + 1, & \text{untuk } i = 0, \\ \frac{1}{2}(6n + 2 - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{2}, i \neq 0, \\ \frac{1}{2}(5n + 2 - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \\ \alpha_1(u_i v_i) &= \begin{cases} \frac{1}{3}(3 + i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(2n + 3 + i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(n + 3 + i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \\ \alpha_1(v_i v_{i+3}) &= \begin{cases} n + 1, & \text{untuk } i = 0, \\ \frac{1}{6}(7n + 6 - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(8n + 6 - i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(9n + 6 - i), & \text{untuk } i \equiv 3 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(10n + 6 - i), & \text{untuk } i \equiv 4 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(11n + 6 - i), & \text{untuk } i \equiv 5 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(12n + 6 - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{6}, i \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

- Kasus 2. $n \equiv 3 \pmod{6}$.

$$\begin{aligned}\alpha_2(u_i) &= \begin{cases} \frac{1}{3}(12n - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(11n + 1 - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(10n + 2 - i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \\ \alpha_2(v_i) &= \begin{cases} \frac{1}{3}(15n - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(14n + 1 - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(13n + 2 - i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \\ \alpha_2(u_i u_{i+1}) &= \begin{cases} 2n + 1, & \text{untuk } i = 0, \\ \frac{1}{2}(6n + 2 - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{2}, i \neq 0, \\ \frac{1}{2}(5n + 2 - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \\ \alpha_2(u_i v_i) &= \begin{cases} \frac{1}{3}(3 + i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(n + 2 + i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(2n + 1 + i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \\ \alpha_2(v_i v_{i+3}) &= \begin{cases} n + 1, & \text{untuk } i = 0, \\ \frac{1}{6}(8n + 7 - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(10n + 8 - i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(9n + 6 - i), & \text{untuk } i \equiv 3 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(11n + 7 - i), & \text{untuk } i \equiv 4 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(7n + 8 - i), & \text{untuk } i \equiv 5 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(12n + 6 - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{6}, i \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

- Kasus 3. $n \equiv 5 \pmod{6}$.

$$\alpha_3(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{3}(12n - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(11n - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(10n - i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3(v_i) &= \begin{cases} \frac{1}{3}(15n - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(14n - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(13n - i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \\
\alpha_3(u_i v_i) &= \begin{cases} \frac{1}{3}(3 + i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(n + 3 + i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}(2n + 3 + i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \\
\alpha_3(u_i u_{i+1}) &= \begin{cases} 2n + 1, & \text{untuk } i = 0, \\ \frac{1}{2}(6n + 2 - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{2}, i \neq 0, \\ \frac{1}{2}(5n + 2 - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \\
\alpha_3(v_i v_{i+3}) &= \begin{cases} n + 1, & \text{untuk } i = 0, \\ \frac{1}{6}(11n + 6 - i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(10n + 6 - i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(9n + 6 - i), & \text{untuk } i \equiv 3 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(8n + 7 - i), & \text{untuk } i \equiv 4 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(7n + 8 - i), & \text{untuk } i \equiv 5 \pmod{6}, \\ \frac{1}{6}(12n + 6 - i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod{6}, i \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Misalkan w_α menyatakan bobot titik dari Graf Petersen $P(n, 3)$. Berdasarkan pelabelan α , bobot titik u_i, v_i pada Graf Petersen $P(n, 3)$ untuk semua $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ adalah:

- (1) Bobot titik terhadap pelabelan total α dari titik $u_i, i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Pada bagian ini terbagi atas tiga kasus.

- Kasus 1. $n \equiv 1 \pmod{6}$.

$$W_{\alpha P_1}(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(17n + 3) + (2 - i), & \text{untuk } i = 0, 1, \\ \frac{1}{2}(19n + 3) + \frac{1}{2}(4 - 2i), & \text{untuk } i = 2, 3, 4, \dots, n-1. \end{cases}$$

- Kasus 2. $n \equiv 3 \pmod{6}$.

$$W_{\alpha_2}(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(17n + 3) + (2 - i), & \text{untuk } i = 0, 1, \\ \frac{1}{2}(19n + 3) + \frac{1}{2}(4 - 2i), & \text{untuk } i = 2, 3, 4, \dots, n-1. \end{cases}$$

- Kasus 3. $n \equiv 5 \pmod{6}$.

$$W_{\alpha_3}(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(17n + 3) + (2 - i), & \text{untuk } i = 0, 1, \\ \frac{1}{2}(19n + 3) + \frac{1}{2}(4 - 2i), & \text{untuk } i = 2, 3, 4, \dots, n-1. \end{cases}$$

Dapat dilihat bahwa bobot yang didapat pada ketiga kasus adalah sama.

- (2) Bobot titik terhadap pelabelan total h dari titik $v_i, i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Pada bagian ini terbagi atas tiga kasus.

- Kasus 1. $n \equiv 1 \pmod{6}$.

$$W_{\alpha_1}(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(15n + 5) + \frac{1}{3}(3 - i), & \text{untuk } i = 0, 3, \\ \frac{1}{6}(47n + 21 - 2i), & \text{untuk } i = 1, 4, 7, 10, \dots, n-3, \\ \frac{1}{6}(49n + 21 - 2i), & \text{untuk } i = 2, 5, 8, 11, \dots, n-2, \\ \frac{1}{6}(51n + 21 - 2i), & \text{untuk } i = 6, 9, 12, \dots, n-1. \end{cases}$$

- Kasus 2. $n \equiv 3 \pmod{6}$.

$$W_{\alpha_2}(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{6}(47n + 21 + in), & \text{untuk } i = 0, 2, \\ \frac{1}{2}(15n + 5) + 12(3 - i), & \text{untuk } i = 1, 3, \\ \frac{1}{6}(49n + 23 - 2i), & \text{untuk } i = 4, 7, 10, \dots, n - 2, \\ \frac{1}{6}(47n + 25 - 2i), & \text{untuk } i = 5, 8, 11, \dots, n - 1, \\ \frac{1}{6}(51n + 21 - 2i), & \text{untuk } i = 6, 9, 12, \dots, n - 3. \end{cases}$$

- Kasus 3. $n \equiv 5 \pmod{6}$.

$$W_{\alpha_3}(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(15n + 5) + \frac{1}{3}(3 - i), & \text{untuk } i = 0, 3, \\ \frac{1}{6}(49n + 21 - 2i), & \text{untuk } i = 1, 4, 7, 10, \dots, n - 1, \\ \frac{1}{6}(47n + 21 - 2i), & \text{untuk } i = 5, 8, 11, \dots, n - 3, \\ \frac{1}{6}(51n + 21 - 2i), & \text{untuk } i = 6, 9, 12, \dots, n - 2. \end{cases}$$

Jadi, himpunan semua bobot titik terhadap pelabelan total h dari titik-titik u_i dan v_i , untuk $i \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, pada graf $P(n, 3)$ adalah sebagai berikut:

$$W_{\alpha_1} \cup W_{\alpha_2} \cup W_{\alpha_3} = \left\{ \frac{1}{2}(15n + 5), \frac{1}{2}(15n + 5) + 1, \frac{1}{6}(47n + 13), \frac{1}{6}(47n + 19), \right. \\ \left. \frac{1}{6}(49n + 11), \dots, \frac{1}{6}(51n + 9) \right\}.$$

Maka diperoleh bahwa graf Petersen yang diperumum $P(n, 3)$ mempunyai pelabelan total $\left(\frac{15n + 5}{2}, 1\right)$ -titik-anti ajaib super. $\square$

4. Kesimpulan

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Banyak titik di graf G adalah p dan banyak sisi di graf G adalah q . Pelabelan total (a, d) -titik antiajaib adalah pemetaan satu-satu $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot titik dari G , $W = \{w(x) | w(x) = f(x) + \sum f(xy), \forall xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (p - 1)d\}$ dimana $a > 0$, $d \geq 0$. Suatu pelabelan total (a, d) -titik antiajaib dikatakan *super* jika $E(G)$ menerima q label terkecil dengan $E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ dan $V(G) \rightarrow \{q + 1, q + 2, \dots, p + q\}$.

Dalam makalah ini telah dikaji kembali bahwa Graf Petersen yang diperumum $P(n, 3)$ mempunyai pelabelan total $\left(\frac{15n + 5}{2}, 1\right)$ -titik-anti ajaib super.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Narwen, Bapak Budi Rudianto, Ibu Lyra Yulianti, Ibu Susila Bahri dan Bapak Zulakmal yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Ngurah, A.A.G. dan E.T. Baskoro, On Magic and Antimagic Labeling of Generalized Petersen Graph, *Utilitas Math.* **67** : 97 – 107

- [2] Bondy, J.A. dan H.S.R. Murty. 2007. *Graph Theory*. Springer, USA
- [3] Chartrand, G. dan L. Lesniak. 1986. *Graph and Digraph 3rd Edition*. California: Wadsworth, Inc
- [4] Markaban, 2004. *Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan*. Widyawara PPPG Matematika. Yogyakarta
- [5] Baca, M. 2000. Consecutive Magic Labeling of Generalized Petersen Graphs, *Utilitas Math.* **58**: 237 – 241
- [6] Miller, M. 2000. *Open Problems in Graph Teory : Labeling and External Graph*. Prosiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia X di Institut Teknologi Bandung, 17 – 20 Juli 2000
- [7] Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Penerbit Informatika, Bandung