Jurnal Matematika UNAND
Vol. **12** No. **3** Hal. 229 – 244
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410
©Departemen Matematika dan Sains Data FMIPA UNAND

ANALISIS MATEMATIKA EFEKTIFITAS VAKSIN PADA PENGENDALIAN PENYEBARAN COVID-19 DI PROVINSI SUMATERA UTARA

HAMIDAH NASUTION*, FEBI ALAMSYAH, NURUL MAULIDA SURBAKTI

Jurusan Matematika, Universitas Negeri Medan, Medan 20221, Indonesia,
email : hamidah_mat67@yahoo.com, febialamsyah@gmail.com, nurulmaulida@unimed.ac.id

Diterima 22 Juni 2023 Direvisi 29 Juni 2023 Dipublikasikan 21 Oktober 2023

Abstrak. *Severe Acute Respiratory Syndrome Corona-virus 2 (SARS-CoV-2)*, atau lebih dikenal *Covid-19*, adalah virus menular yang sangat berbahaya dan menular dengan cepat. Penyebaran *Covid-19* terus menjadi tantangan global yang signifikan dan dapat menimbulkan kematian. Vaksinasi menjadi strategi penting dalam upaya mengendalikan penyebaran penyakit *Covid-19* ini. Tujuan penelitian ini adalah menunjukkan efektivitas vaksinasi dalam pengendalian penyebaran *Covid-19* di wilayah Sumatera Utara. Pendekatan yang digunakan adalah melalui pengembangan dan analisis model matematika yang mempertimbangkan faktor-faktor kunci yang mempengaruhi penyebaran penyakit. Dalam model ini, parameter vaksinasi digabungkan dengan variabel-variabel terkait penyebaran penyakit seperti tingkat kontak sosial, kekebalan populasi, dan faktor risiko lainnya. Vaksinasi dilakukan terhadap populasi rentan. Hasil evaluasi menunjukkan bahwa vaksinasi memiliki peran yang signifikan dalam mengendalikan penyebaran *Covid-19* di Sumatera Utara. Dengan menggunakan model matematika, dapat diprediksi dampak vaksinasi terhadap penurunan jumlah kasus, tingkat kesembuhan, dan tingkat kematian terkait *Covid-19*. Selain itu, pada artikel ini dialisis skenario vaksinasi yang berbeda untuk mengevaluasi efektivitasnya dalam mengurangi penyebaran penyakit. Hasil penelitian menunjukkan semakin besar populasi rentan yang divaksin, laju penularan akan melambat, sehingga mengurangi populasi terinfeksi. Analisis dari hasil simulasi menunjukkan bahwa 75% jumlah populasi di Provinsi Sumatera Utara melaksanakan vaksinasi. Hal ini memberikan penurunan jumlah populasi terinfeksi yang signifikan. Grafik populasi terinfeksi turun melandai menuju nol, artinya kasus *Covid-19* di Provinsi Sumatera Utara dalam kurun waktu tertentu berkurang secara signifikan, dan *Covid-19* bukan pandemi lagi. Hasil penelitian ini dapat menjadi dasar bagi pengambilan keputusan yang berorientasi pada vaksinasi dan upaya pengendalian penyebaran *Covid-19* di Sumatera Utara.

Abstract. *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2 (SARS-CoV-2), better known as Covid-19 is a very dangerous and rapidly infectious virus. The spread of Covid-19 continues to be a significant global challenge and can lead to death. Vaccination is an important strategy to control the spread of Covid-19 disease. The study aims to demonstrate the effectiveness of vaccines in controlling the spread of Covid-19 in the region of North Sumatra. The approach used is through the development and analysis of mathematical models that consider the key factors affecting the spread of the disease. In this model, we combine vaccination parameters with variables related to disease spread,*

*penulis korespondensi

such as social contact rates, population immunity, and other risk factors. Vaccination is done against vulnerable populations. The evaluation results show that vaccination plays a significant role in controlling the spread of Covid-19 in North Sumatra. Mathematical models could predict the impact of vaccination on a decrease in the number of cases, healing rates, and mortality related to Covid-19. In addition, we also analyzed different vaccination scenarios to evaluate their effectiveness in reducing the spread of the disease. Research results showed that the larger the vaccinated vulnerable population, the slower the transmission rate, thus reducing the infected population. Analysis of the results of the simulation showed that 75% of the population in the North Sumatra Province carried out vaccination, giving a substantial decrease in the numbers of infected populations; the infected population chart dropped to zero, meaning the case of Covid-19 in the South Sumatra Province in a certain period decreased significantly and COVID-19 is no longer a pandemic. The results of this research could be the basis for vaccine-oriented decision-making and efforts to control the spread of Covid-19 in North Sumatra.

Kata Kunci: *Covid-19*, Kestabilan, Matlab, Model SEIR, Vaksinasi

1. Pendahuluan

Saat ini, seluruh dunia sedang menghadapi situasi yang sangat berhati-hati terhadap penyebaran suatu virus yang dikenal sebagai Virus Corona atau *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2 (SARS-CoV-2)*. Virus ini merupakan varian baru dari Coronavirus yang termasuk dalam keluarga virus menular. Virus ini dapat menyebabkan berbagai jenis penyakit, mulai dari gejala mirip flu hingga penyakit yang lebih serius seperti *Middle East Respiratory Syndrome (MERS-CoV)* dan *Severe Acute Respiratory Syndrome (SARS-CoV)*. Infeksi yang disebabkan oleh Virus Corona ini dikenal dengan sebutan *Covid-19 (Corona Virus Disease 2019)*, yang pertama kali ditemukan pada tahun 2019 dan sebelumnya belum pernah teridentifikasi sebagai virus yang dapat menyerang manusia [1].

Kasus pertama Covid-19 ditemukan di Wuhan, China pada akhir Desember 2019. Virus ini menyebar dengan cepat dan telah menjangkau hampir seluruh negara di dunia. Awal munculnya Covid-19 diduga berasal dari penyakit pneumonia dengan gejala mirip flu, seperti batuk, demam, kelelahan, sesak napas, dan kehilangan nafsu makan. Namun, berbeda dengan influenza, Covid-19 dapat dengan cepat berkembang menjadi infeksi yang lebih serius dan berpotensi menyebabkan kegagalan organ. Pasien dengan riwayat penyakit sebelumnya berisiko mengalami kondisi darurat. Pada tanggal 11 Maret 2020, Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) menyatakan Covid-19 sebagai pandemi. Status pandemi atau epidemi global Covid-19 menunjukkan bahwa penyebarannya begitu cepat sehingga tidak ada jaminan untuk terhindar dari penularan Covid-19 [2].

Secara umum, penularan Covid-19 antar manusia terjadi melalui droplet atau cairan yang dilepaskan saat seseorang batuk atau bersin. Droplet tersebut dapat menempel pada benda di sekitarnya. Cairan yang mengandung Virus Corona dapat dengan mudah menular kepada orang lain jika mereka menyentuh benda yang terkontaminasi tersebut dan kemudian menyentuh area wajah mereka. Dalam proses ini, virus dapat masuk ke dalam paru-paru melalui pernafasan. Oleh karena itu, tindakan pencegahan yang penting untuk menghentikan penyebaran Virus Corona adalah dengan sering mencuci tangan, menggunakan masker, dan menjaga jarak dengan orang lain. [3].

Ada banyak orang yang terlihat sehat, tetapi sebenarnya terinfeksi Covid-19. Mereka termasuk dalam kategori orang tanpa gejala. Penularan dari orang yang terinfeksi Covid-19 tanpa gejala juga menjadi sumber penyebaran virus kepada orang lain. Penting untuk membedakan peran penyebaran dari orang yang terinfeksi dengan gejala klinis dan orang yang terinfeksi tanpa gejala klinis untuk memahami lebih lanjut. Perbedaan ini memiliki implikasi penting dalam pengembangan strategi kesehatan masyarakat untuk mengendalikan penyebaran virus.

Identifikasi penyebaran virus dari orang yang terinfeksi tanpa gejala merupakan tantangan dalam penelitian Covid-19. Namun, dengan melakukan upaya penelusuran kontak yang cermat dan investigasi epidemiologis pada kasus dan kontak langsung, informasi yang berharga dapat diperoleh. Penelitian terbaru mengenai transmisi virus dan tinjauan literatur menunjukkan bahwa kemungkinan penularan dari orang yang tidak menunjukkan gejala ini cenderung lebih rendah dibandingkan dengan orang yang mengalami gejala. [1].

Vaksinasi merupakan salah satu intervensi kesehatan yang paling umum digunakan untuk mengatasi penyebaran penyakit menular. Pengembangan vaksin yang aman dan efektif dalam mencegah penularan penyakit sangatlah penting, karena diharapkan dapat mengendalikan penyebaran penyakit tersebut dan mencegah terjadinya wabah di masa depan [4,5]. Vaksinasi telah digunakan secara luas untuk mencegah berbagai penyakit, dan tidak menutup kemungkinan bahwa vaksinasi dapat digunakan dalam upaya pencegahan penyebaran Covid-19, penyakit yang saat ini sedang melanda dunia [6].

Mengingat tingginya jumlah kematian yang disebabkan oleh Covid-19, negara-negara dan berbagai pihak terlibat secara aktif dalam memberikan dan mencari solusi yang tepat untuk penanganan penyebaran Covid-19. Para pakar pemodelan matematika dari berbagai negara juga terlibat dalam upaya ini. Pemodelan matematika merupakan salah satu alat utama perencanaan epidemi, yang dapat membantu memecahkan masalah *Covid-19*. Pemodelan matematika merupakan salah satu cara untuk menggambarkan skema penyebaran penyakit menular, melalui model matematika masalah yang kompleks dapat digambarkan dengan lebih sederhana dan mudah dipahami. Salah satu cara pencegahan penularan penyakit adalah dengan memperhatikan perilaku setiap parameter yang mempengaruhi penyebaran penyakit ini, hal ini dapat dilakukan melalui pendekatan pemodelan matematis [7,8,9].

Pemodelan matematika memainkan peran penting dalam mengidentifikasi hubungan antara penyebaran Covid-19 dengan berbagai parameter epidemiologi. Melalui pendekatan ini, para peneliti dapat mengembangkan model yang memperhitungkan faktor-faktor seperti tingkat penularan, periode inkubasi, tingkat keparahan, dan keefektifan tindakan pengendalian [10,11]. Dengan menggunakan data yang tersedia dan menganalisis pola penyebaran, pemodelan matematika dapat memberikan wawasan yang berharga untuk perencanaan dan pengambilan keputusan dalam mengatasi pandemi ini. Melalui simulasi dan analisis yang cermat, pemodelan matematika dapat membantu dalam memprediksi dampak dari berbagai tindakan pengendalian, seperti pembatasan sosial, vaksinasi massal, atau penggunaan masker, sehingga membantu menginformasikan kebijakan dan strategi yang

efektif untuk menangani penyebaran Covid-19.

2. Metode

Dalam penelitian ini dilakukan pendekatan dengan metode studi literatur untuk mengembangkan suatu model matematika yang menggambarkan bagaimana penyebaran Covid-19 berlangsung di Sumatera Utara. Model ini memperhatikan perbedaan antara subpopulasi yang terinfeksi dengan gejala dan subpopulasi yang terinfeksi tanpa gejala, serta mempertimbangkan dampak vaksinasi. Tujuan utama dari penelitian ini adalah untuk menginvestigasi bagaimana virus menyebar dan dampak dari vaksinasi di wilayah tersebut. Model yang dijelaskan dalam penelitian ini adalah model SEIR. Berikut ini adalah langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian tersebut:

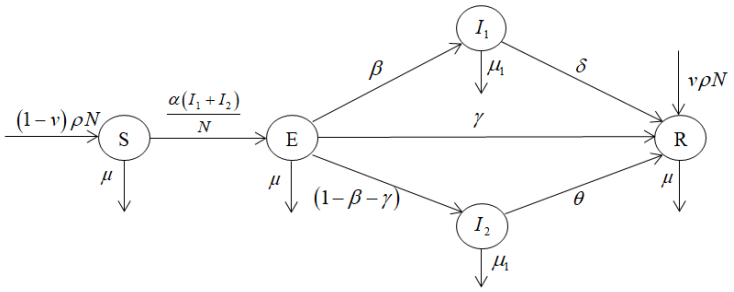
(1) Menentukan model matematika penyebaran *Covid-19* dengan membedakan antara subpopulasi infeksi dengan gejala dan subpopulasi infeksi tanpa gejala dengan pengaruh vaksinasi.
(2) Menentukan titik kesetimbangan pada kondisi bebas penyakit dan kondisi endemik pada model SEIR penyebaran *Covid-19*.
(3) Menentukan *Basic Reproduction Number* pada model SEIR penyebaran *Covid-19*.
(4) Menganalisis titik kesetimbangan model SEIR pada penyebaran *Covid-19* dengan vaksinasi.
(5) Menentukan kestabilan sistem dengan melakukan linierisasi menggunakan matriks Jacobian dan nilai eigen. Dengan membentuk matriks Jacobian, kemudian mensubstitusikan nilai titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, kemudian akan diperoleh nilai eigen.
(6) Menentukan jenis kestabilan berdasarkan titik kesetimbangan model SEIR. Berdasarkan nilai eigen, akan ditentukan jenis kestabilan untuk titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik penyakit.
(7) Melakukan simulasi numerik untuk melihat pengaruh vaksinasi pada sistem penyebaran Covid-19 model SEIR.
(8) Diperoleh kesimpulan tentang kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dan terinfeksi pada penyebaran penyebaran *Covid-19* dengan vaksinasi.

3. Pembahasan

3.1. *Model Matematika Penyebaran Covid-19*

Dalam model matematika ini populasi manusia pada waktu t dibagi menjadi lima kompartemen yang berbeda. Kompartemen pertama adalah kelompok individu yang rentan terhadap penyakit, disebut sebagai kelompok "S" (*Susceptible*). Kompartemen kedua adalah kelompok individu yang telah terinfeksi tetapi belum terdeteksi, yang memiliki potensi untuk menularkan virus kepada orang lain. Kelompok ini disebut "E" (*Exposed*). Kompartemen ketiga adalah kelompok individu yang terinfeksi dan menunjukkan gejala klinis, dan juga dapat menularkan virus. Kelompok ini disebut "I_1" (Infected). Kompartemen keempat adalah kelompok individu

yang terinfeksi tanpa menunjukkan gejala klinis, tetapi masih mampu menularkan virus. Kelompok ini disebut "I_2" (*Infected*). Kompartemen terakhir adalah kelompok individu yang telah sembuh dari penyakit, yang disebut "R" (*Recovered*). Pada Gambar 1 diberikan skema penyebaran *Covid-19*.



Gambar 1. Model Epidemi SEIR

Berdasarkan Gambar 1, model matematika penyebaran *Covid-19* dengan pengaruh vaksinasi dideskripsikan ke dalam sistem persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= (1-v)\rho N - \left(\mu + \frac{\alpha(I_1+I_2)}{N}\right) S, \\
\frac{dE}{dt} &= \frac{\alpha(I_1+I_2)}{N} S - (\mu+1)E, \\
\frac{dI_1}{dt} &= \beta E - (\mu_1+\delta)I_1, \\
\frac{dI_2}{dt} &= (1-\beta-\gamma)E - (\mu_1+\theta)I_2, \\
\frac{dR}{dt} &= \delta I_1 + \theta I_2 + \gamma E + v\rho N - \mu R.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Keterangan:

ρ : Laju kelahiran alami,
μ : Laju kematian alami,
μ : Laju kematian akibat *Covid-19*,
α : Laju perpindahan individu rentan ke ekspose,
β : Laju perpindahan individu ekspose ke infeksi dengan gejala klinis,
γ : Laju perpindahan individu ekspose ke sembuh,
δ : Laju perpindahan infeksi dengan gejala klinis ke sembuh,
θ : Laju perpindahan infeksi tanpa gejala klinis ke sembuh.

3.2. *Titik Kesetimbangan Model SEIR Penyebaran Covid-19*

Akan dicari titik kesetimbangan sistem (3.1) dengan cara membuat sistem tersebut dalam kondisi konstan terhadap waktu, jika memenuhi:

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI_1}{dt} = 0, \frac{dI_2}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0 \tag{3.2}$$

Dengan menyelesaikan persamaan secara bersamaan maka akan diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dan titik kesetimbangan endemik penyakit (E_1).

(1) *Titik Kesetimbangan pada Kondisi Bebas Penyakit (E_0)*:
Titik kesetimbangan pada kondisi bebas penyakit merupakan kondisi ketika tidak terdapat individu yang terinfeksi Covid-19 pada suatu populasi tertentu atau dengan kata lain nilai $I_1 = I_2 = 0$. Oleh karena itu, dari sistem (3.1) dan sistem (3.2) diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut.

$$E_0 = (S, E, I_1, I_2, R) = (\frac{(1-v)\rho}{\mu}, 0, 0, 0, \frac{v\rho}{\mu}).$$

(2) *Titik Kesetimbangan pada Kondisi Endemik (E_1)* :
Kesetimbangan pada kondisi endemik penyakit merupakan kondisi ketika terdapat individu yang terinfeksi pada suatu populasi tertentu atau dengan kata lain $I_1 \neq I_2 \neq 0$ dari sistem (3.1) dan sistem (3.2) dengan $(\mu_1 + \delta) = a, (1-\beta-\gamma) = b$ dan $(\mu_1 + \theta) = c$ sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit adalah

$$(E_1) = (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*, R^*) : \begin{pmatrix} \frac{ac(\mu+1)}{\alpha(c\beta+ab)}, \frac{c\beta\rho\alpha + ab\rho\alpha - c\beta v\rho\alpha - abv\rho\alpha - ac\mu^2 - ac\mu}{\alpha(c\beta\mu + ab\mu + c\beta + ab)}, \\ \frac{\beta(c\alpha\rho\beta + ab\alpha\rho - cv\alpha\beta\rho - abv\alpha\rho - ac\mu^2 - ac\mu)}{a\alpha(c\beta\mu + ab\mu + c\beta + ab)}, \\ \frac{b(c\beta\rho\alpha + ab\rho\alpha - c\beta v\rho\alpha - abv\rho\alpha - ac\mu^2 - ac\mu)}{c\alpha(c\beta\mu + ab\mu + c\beta + ab)}, \\ \frac{(1-v)(c\delta\alpha\rho\beta + ab\theta\alpha\rho + ac\gamma\alpha\rho)}{ac\mu\alpha(\mu+1)} \\ + \frac{(-ac^2\mu\delta\beta - a^2b\theta c\mu - a^2c^2\gamma\mu + v\rho ca\alpha(c\beta+ab))}{ac\mu\alpha(c\beta+ab-c\beta v-abv)} \end{pmatrix}$$

3.3. *Basic Reproduction Number* (R_0)

Basic Reproduction Number (R0) adalah nilai yang menggambarkan harapan jumlah infeksi yang dihasilkan oleh satu individu terinfeksi dalam suatu populasi rentan dalam satu periode waktu. Untuk menghitung nilai R0 dalam model penyebaran Covid-19, digunakan metode *next generation matrix*. Metode ini melibatkan penggunaan matriks generasi berikutnya (*next generation matrix*), yang diperoleh dalam kondisi populasi bebas dari penyakit.

Next generation matrix terdiri dari sistem persamaan yang memuat kelas populasi yang terpapar, kelas populasi yang terinfeksi tanpa gejala, dan kelas populasi yang terinfeksi dengan gejala.

$$K = FV^{-1}$$

dengan

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \alpha s & \alpha s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} (\mu+1) & 0 & 0 \\ \beta & (\mu_1+\delta) & 0 \\ (1-\beta-\gamma) & 0 & (\mu_1+\theta) \end{pmatrix},$$

sehingga diperoleh

$$K = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\rho(1-v)\beta}{\mu(\mu_1+\delta)(\mu+1)} + \dfrac{\alpha\rho(1-v)(1-\beta-\gamma)}{\mu(\mu+1)(\mu_1+\theta)} & -\dfrac{\alpha\rho(1-v)}{\mu(\mu_1+\delta)} & -\dfrac{\alpha\rho(1-v)}{\mu(\mu_1+\theta)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Basic reproduction number (R_0) diperoleh dari nilai eigen positif terbesar dari $|K - \lambda I| = 0$, dan dapat ditulis:

$$R_0 = \frac{\alpha\rho(1-v)\beta(\mu_1+\theta) + \alpha\rho(1-v)(1-\beta-\gamma)(\mu_1+\delta)}{\mu(\mu_1+\delta)(\mu_1+\theta)(\mu+1)}.$$

3.4. *Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan*

Untuk menganalisis stabilitas titik kesetimbangan dalam model epidemi SEIR, kita menggunakan metode linearisasi dengan menghitung nilai eigen dari matriks Jacobian. Matriks Jacobian ini diperoleh melalui linearisasi sistem persamaan diferensial nonlinier menjadi sistem persamaan diferensial linear. Matriks Jacobian untuk model epidemi SEIR adalah sebagai berikut:

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} -(\mu+\alpha(i_1+i_2)) & 0 & -d & -d & 0 \\ \alpha(i_1+i_2) & -(\mu+1) & \alpha s & \alpha s & 0 \\ 0 & \beta & -(\mu_1+\delta) & 0 & 0 \\ 0 & (1-\beta-\gamma) & 0 & -(\mu_1+\theta) & 0 \\ 0 & \gamma & \delta & \theta & -\mu \end{bmatrix}.$$

(1) *Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit* :

$$\mathbb{J}(E_0) = \begin{bmatrix} (-\mu-\lambda) & 0 & -d & -d & 0 \\ 0 & (-\mu-1-\lambda) & d & d & 0 \\ 0 & \beta & (-a-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & (-c-\lambda) & 0 \\ 0 & \gamma & \delta & \theta & (-\mu-\lambda) \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

dimana,

$$a = (\mu_1+\delta), b = (1-\beta-\gamma), c = (\mu_1+\theta), d = \frac{\alpha\rho(1-v)}{\mu}.$$

Dari sistem (3.3) dibentuk persamaan karakteristik $|\mathbb{J}(E_0) - \lambda I| = 0$, sehingga diperoleh persamaan

$$(-\mu-\lambda)(-\mu-\lambda)P = 0, \tag{3.4}$$

dengan

$$P = \lambda^3 + \lambda^2(a+c+\mu+1) + \lambda \begin{pmatrix} ac + a\mu - bd + c\mu \\ -d\beta + a + c \end{pmatrix} + (-abd + ac\mu - cd\beta + ac). \tag{3.5}$$

Berdasarkan persamaan karakteristik sistem (3.4) diperoleh $\lambda_1 = -\mu$ dan $\lambda_2 = -\mu$. Untuk menentukan ketiga nilai eigen lainnya perhatikan sistem (3.5), diperoleh nilai:

$$\begin{aligned}
\ell_0 &= 1,\\
\ell_1 &= a + c + \mu + 1,\\
\ell_2 &= ac + a\mu - bd + c\mu - d\beta + a + c,\\
\ell_3 &= -abd + ac\mu - cd\beta + ac.
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3 > 0$, sehingga dibentuk matriks Hurwitz sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_0 & 0 \\ \ell_3 & \ell_2 & \ell_1 \\ \ell_5 & \ell_4 & \ell_3 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan matriks Hurwitz di atas diperoleh determinan matriks Hurwitz:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= |[\ell_1]| = a + c + \mu + 1,\\
\Delta_2 &= \left|\begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_0 \\ \ell_3 & \ell_2 \end{bmatrix}\right| = \ell_1\ell_2 - \ell_3,\\
\Delta_3 &= \left|\begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_0 & 0 \\ \ell_3 & \ell_2 & \ell_1 \\ 0 & 0 & \ell_3, \end{bmatrix}\right|,\\
&= (\ell_1\ell_2 - \ell_3)\ell_3,\\
&= \Delta_2\ell_3.
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa $\ell_1 > 0$ sehingga $\Delta_1 > 0$. Selanjutnya $\Delta_2 = \ell_1\ell_2 - \ell_0\ell_3 > 0$ maka haruslah

$$\begin{aligned}
(a + c + \mu + 1)(ac + a\mu - bd + c\mu - d\beta + a + c) - (-abd + ac\mu - cd\beta + ac) > 0,\\
(a + c + \mu + 1)(ac + a\mu + c\mu + a + c)(-d(\beta + b)) - (ac(\mu + 1) - d(ab + c\beta)) > 0,\\
\frac{(a + c + \mu + 1)(ac + a\mu + c\mu + a + c)(-d(\beta + b))}{(-d(\beta + b))} + \frac{(ac(\mu + 1) - d(ab + c\beta))}{d(\beta + b)} > 0,\cdot\\
\frac{(a + c + \mu + 1)(ac + a\mu + c\mu + a + c)(d(\beta + b)) + (1 - R_0)}{d(\beta + b)} > 0,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Berdasarkan sistem (3.6) diperoleh $\Delta_2 > 0$. Selanjutnya untuk menunjukkan $\Delta_3 > 0$, diketahui bahwa $\ell_3 > 0$ dan $\Delta_2 > 0$, maka haruslah $\Delta_3 = \ell_3\Delta_2 > 0$. Determinan matriks Routh Hurwitz Δ_1, Δ_2, dan Δ_3 bernilai positif jika $R_0 < 1$. Dengan demikian sistem (3.4) mempunyai akar-akar yang bagian realnya negatif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik.

(2) *Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik :*
Substitusikan titik kestabilan endemik (E_1) ke dalam matriks $\mathbb{J}$, maka diperoleh

Matriks Jacobian sebagai berikut.

$$\mathbb{J}(E_1) = \begin{bmatrix} -\mu - A & 0 & -Q & -Q & 0 \\ A & -(\mu+1) & Q & Q & 0 \\ 0 & \beta & -a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & -c & 0 \\ 0 & \gamma & \Delta & \theta & -\mu \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

dimana

$$\begin{aligned} A &= \frac{(c\beta + ab)(c\alpha\rho\beta - cv\alpha\beta\rho - abv\alpha\rho - ac\mu^2 - ac\mu)}{ac(c\beta\mu + ab\mu + c\beta + ab)}, \\ Q &= \frac{ac(\mu+1)}{c\beta + ab}, \\ a &= (\mu_1 + \delta), \\ b &= (1 - \beta - \gamma), \\ c &= (\mu_1 + \theta). \end{aligned}$$

Dari sistem (3.7) dibentuk persamaan karakteristik $|\mathbb{J}(E_1) - \lambda I| = 0$, sehingga diperoleh persamaan

$$(-\mu - \lambda)T = 0, \tag{3.8}$$

dengan

$$\begin{aligned} T = \lambda^4 + \lambda^3(A + a + c + 2\mu + 1) + \lambda^2(Aa + Ac + A\mu - Qb - Q\beta + ac + 2a\mu + 2c\mu + \mu^2 + A + a + c + \mu) \\ + \lambda(Aac + Aa\mu + Ac\mu - Qab - Qb\mu - Qc\beta - Q\mu\beta + 2ac\mu + a\mu^2 + c\mu^2 + Aa + Ac + ac + a\mu + c\mu). \\ + (Aac\mu - Qab\mu - Qc\mu\beta + ac\mu^2 + Aac + ac\mu) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Berdasarkan persamaan karakteristik (3.8) diperoleh $\lambda_1 = -\mu$. Untuk menentukan nilai eigen lainnya perhatikan sistem (3.9), diperoleh nilai:

$$\begin{aligned} \ell_0 &= 1, \\ \ell_1 &= A + a + c + 2\mu + 1, \\ \ell_2 &= Aa + Ac + A\mu - Qb - Q\beta + ac + 2a\mu + 2c\mu + \mu^2 + A + a + c + \mu, \\ \ell_3 &= Aac + Aa\mu + Ac\mu - Qab - Qb\mu - Qc\beta - Q\mu\beta + 2ac\mu + a\mu^2 + c\mu^2 + Aa + Ac + ac + a\mu + c\mu, \\ \ell_4 &= Aac\mu - Qab\mu - Qc\mu\beta + ac\mu^2 + Aac + ac\mu. \end{aligned}$$

Kemudian perhatikan

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(c\beta+ab)\,(c\alpha\rho\beta+ab\alpha\rho-cv\alpha\beta\rho-abv\alpha\rho-ac\mu^2-ac\mu)}{ac(c\beta\mu+ab\mu+c\beta+ab)},\\
&= \frac{(c\beta+ab)\,(c\alpha\rho\beta+ab\alpha\rho-cv\alpha\beta\rho-abv\alpha\rho-ac\mu^2-ac\mu)}{ac(c\beta\mu+ab\mu+c\beta+ab(\mu+1))},\\
&= \frac{(c\beta+ab)(\alpha\rho(c\beta+ab)-v\alpha\rho(c\beta+ab)-ac\mu(\mu+1))}{ac((ab+c\beta)(\mu+1))},\\
&= \frac{(\alpha\rho-v\alpha\rho)(c\beta+ab)-ac\mu(\mu+1)}{ac(\mu+1)},\\
&= \frac{(\alpha\rho-v\alpha\rho)(c\beta+ab)}{ac(\mu+1)}-\frac{ac\mu(\mu+1)}{ac(\mu+1)},\\
&= \frac{\mu(\alpha\rho-v\alpha\rho)(c\beta+ab)}{\mu ac(\mu+1)}-\frac{ac\mu^2(\mu+1)}{\mu ac(\mu+1)},\\
&= \frac{\mu d(c\beta+ab)}{ac(\mu+1)}-\mu,\\
&= \mu R_0-\mu,\\
&= \mu(R_0-1).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Berdasarkan sistem (3.10) jika $R_0 \geq 1$ maka $A > 0$. Sehingga jelas bahwa $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 > 0$. Sehingga dibentuk matriks Hurwitz sebagai berikut.

$$H = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_0 & 0 & 0 \\ \ell_3 & \ell_2 & \ell_1 & \ell_0 \\ \ell_5 & \ell_4 & \ell_3 & \ell_2 \\ \ell_7 & \ell_6 & \ell_5 & \ell_4 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan matriks H, diperoleh determinan matriks Hurwitz sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= |[\ell_1]| = A + a + c + 2\mu + 1,\\
\Delta_2 &= \left|\begin{bmatrix} \ell_1 & 1 \\ \ell_3 & \ell_2 \end{bmatrix}\right| = \ell_1\ell_2 - \ell_3,\\
\Delta_3 &= \left|\begin{bmatrix} \ell_1 & 1 & 0 \\ \ell_3 & \ell_2 & \ell_1 \\ 0 & 0 & \ell_3 \end{bmatrix}\right| = (\ell_1\ell_2 - \ell_3)\ell_3 = \Delta_2\ell_3,\\
\Delta_4 &= \left|\begin{bmatrix} \ell_1 & 1 & 0 & 0 \\ \ell_3 & \ell_2 & \ell_1 & 1 \\ 0 & \ell_4 & \ell_3 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ell_4 \end{bmatrix}\right| = \ell_4(\ell_1\ell_2\ell_3 - \ell_3^2) - \ell_1^2\ell_4^2 = \ell_4\Delta_3 - \ell_1^2\ell_4^2.
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa $\ell_1 > 0$ sehingga $\Delta_1 > 0$. Berdasarkan sistem (3.10) bahwa $A > 0$ jika dan hanya jika $R_0 \geq 1$, sehingga Δ_2 akan bernilai positif apabila $\ell_1\ell_2 > \ell_3$. Maka terbukti bahwa $\Delta_2 > 0$.

Selanjutnya akan dibuktikan $\Delta_3 > 0$, diketahui bahwa $\ell_3 > 0$ dan $\Delta_2 > 0$, maka jelas bahwa $\Delta_2\ell_3 > 0$. Akan ditentukan Δ_4 bernilai positif apabila $\ell_4\Delta_3 > \ell_1^2\ell_4^2$, diketahui bahwa $\ell_4 > 0$ dan $\Delta_3 > 0$, maka jelas bahwa $\Delta_4 > 0$.

Determinan matriks Routh Hurwitz $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, dan Δ_4 bernilai positif jika $R_0 \geq 1$. Dengan demikian sistem (3.9) mempunyai akar-akar yang bagian realnya negatif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik.

3.5. *Simulasi Numerik*

Nilai parameter model yang digunakan pada model SEIR berdasarkan kasus penyebaran *Covid-19* di Sumatera Utara. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi ditampilkan pada Tabel 1 berikut. Selanjutnya, nilai awal yang digunakan pada

Tabel 1. Nilai Parameter

Simbol	Nilai Parameter	Sumber
ρ	0.0128	[**?**]
α	0.7	[**?**]
β	0.26	Asumsi
γ	0.6	Asumsi
δ	0.087	[12]
θ	0.075	[12]
μ_1	0.0002475	[**?**]

model adalah total populasi awal $N = 14.799.381$ dengan $N = S + E + I_1 + I_2 + R$. Adapun nilai awal variabel berdasarkan data kasus *Covid-19* yang terjadi dari Maret 2020 hingga Maret 2021 di Sumatera Utara yaitu $S = 14.712.795, E = 35.200, I_1 = 15.509, I_2 = 15.509$ dan $R = 24.008$.

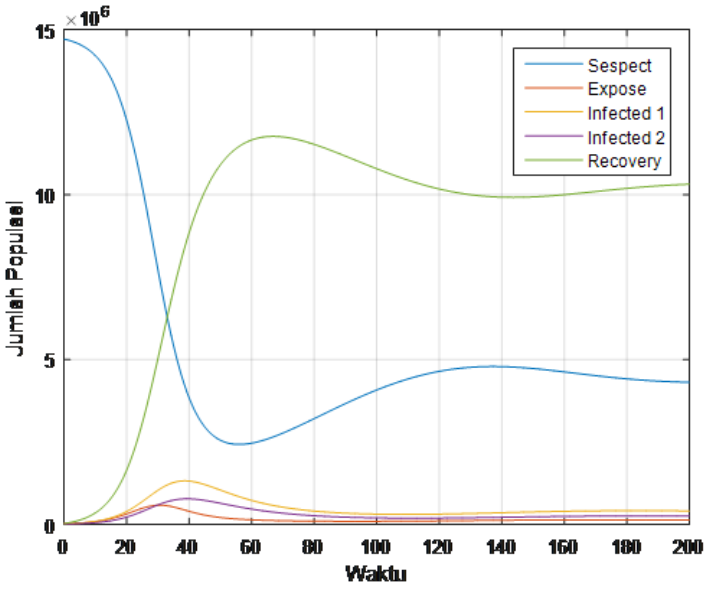
Berdasarkan nilai parameter dari Tabel 1, diperoleh R_0 sebesar 3,379. Karena $R_0 \geq 1$ maka penyakit akan menyebar, atau dengan kata lain akan terjadi endemik. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa penyebaran *Covid-19* bersifat endemik stabil asimtotik. Pada Gambar 2 diberikan penyebaran *Covid-19* di Sumatera Utara.

3.6. *Penggunaan Vaksinasi dalam Penyebaran Covid-19*

Vaksinasi digunakan sebagai salah satu strategi untuk mengatasi penyebaran *Covid-19*. Terdapat parameter v yang mengindikasikan jumlah individu yang divaksinasi. Semakin besar nilai v yang digunakan, semakin cepat penyebaran *Covid-19* akan berhenti dan mencapai kestabilan bebas penyakit. Hal ini dapat diperlihatkan melalui Tabel 2.

Berdasarkan Tabel 2 kondisi model akan bersifat stabil bebas penyakit saat nilai $v = 0.75$. Pada Gambar 3 diberikan grafik simulasi penyebaran *Covid-19* dengan menggunakan vaksinasi. Pada Gambar 4 – Gambar 7 diberikan grafik pengaruh vaksinasi.

Hasil simulasi menunjukkan grafik penyebaran *Covid-19* di Sumatera Utara dengan mempertimbangkan pengaruh vaksinasi. Dari grafik tersebut terlihat bahwa semakin banyak populasi yang divaksinasi, jumlah populasi yang terinfeksi akan



Gambar 2. Grafik penyebaran *Covid-19* di Sumatera Utara

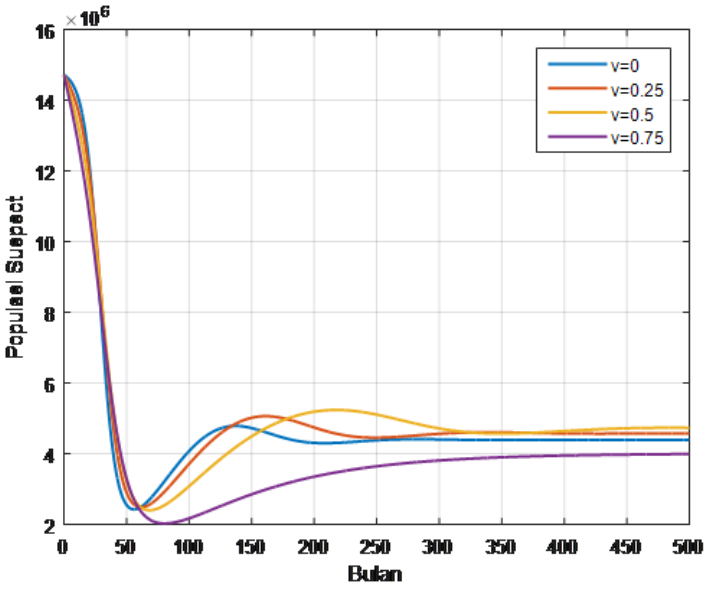
Tabel 2. Penerapan Vaksinasi dalam Penyebaran *Covid-19*

Nilai v	R_0	Keterangan
0	3.379	Endemik Stabil Asimtotik
0.25	2.5342	Endemik Stabil Asimtotik
0.5	1.6895	Endemik Stabil Asimtotik
0.75	0.8447	Bebas Penyakit Stabil Asimtotik

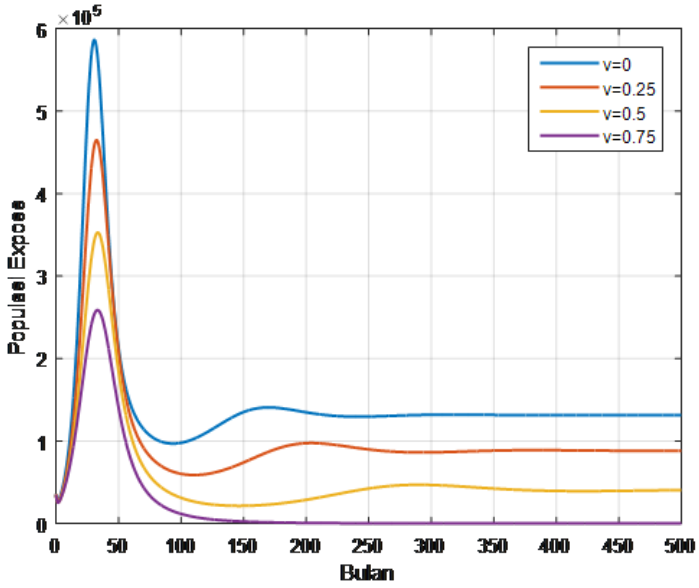
berkurang dan tingkat kesembuhan akan meningkat. Hal ini menunjukkan pentingnya pemberian vaksin dalam mencegah penyebaran *Covid-19*.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, model SEIR dengan pengaruh vaksinasi pada penyebaran *Covid-19* di Sumatera Utara menunjukkan jenis kestabilan yang mengarah pada keadaan stabil asimtotik. Analisis terhadap kasus *Covid-19* di Sumatera Utara menunjukkan bahwa daerah tersebut dapat mencapai keadaan bebas penyakit jika vaksinasi dilakukan pada 75% dari total populasi. Hasil simulasi menunjukkan bahwa setelah dilakukan vaksinasi, jumlah populasi yang rentan mengalami penurunan sementara populasi yang sembuh mengalami peningkatan. Dengan adanya vaksinasi ini, penyebaran *Covid-19* secara perlahan akan menghilang.



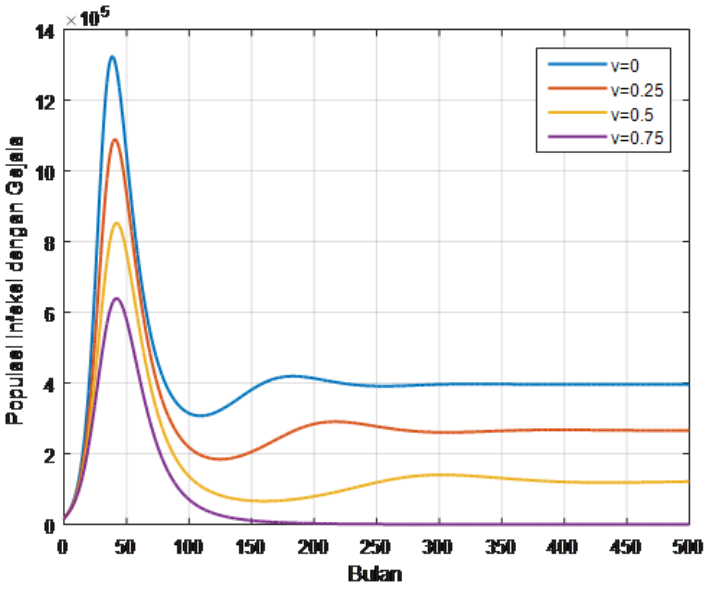
Gambar 3. Grafik Pengaruh Vaksinasi terhadap Populasi *Suspect*



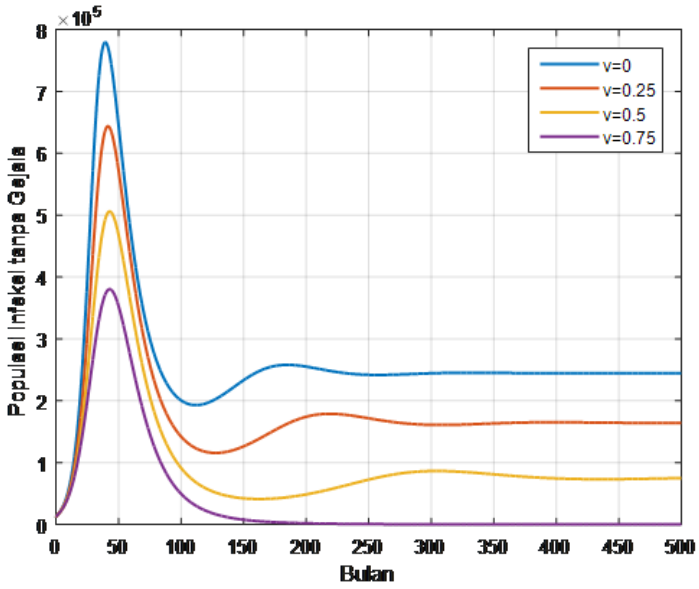
Gambar 4. Grafik Pengaruh Vaksinasi terhadap Populasi *Expose* di Sumatera Utara

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Gugus Tugas *Covid-19* di Sumatera utara (https://Covid-19.sumutprov.go.id) atas dukungan data harian untuk kasus *Covid-*

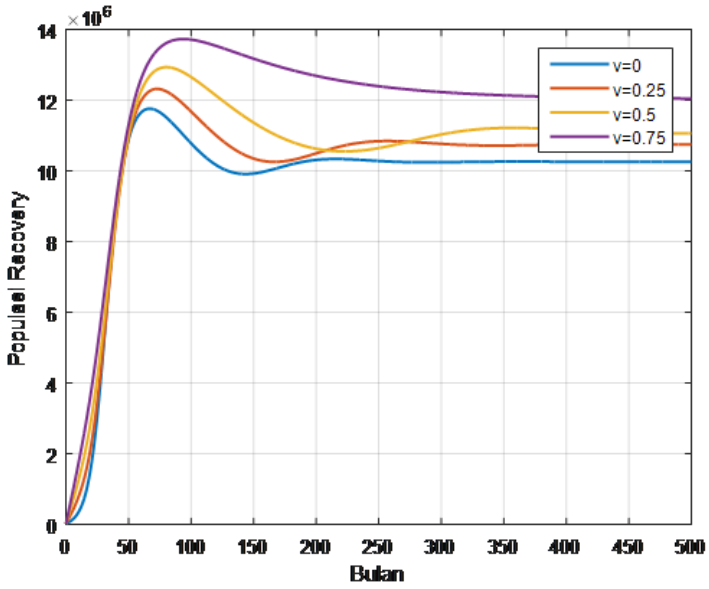


Gambar 5. Grafik Pengaruh Vaksinasi terhadap Populasi Infeksi dengan Gejala



Gambar 6. Grafik Pengaruh Vaksinasi terhadap Populasi Infeksi tanpa Gejala

19 di Sumatera utara yang digunakan dalam penelitian. Penulis juga mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada dosen-dosen Universitas Negeri Medan yang telah memberikan masukan dan sarannya dalam penelitian ini dan kepada Univer-



Gambar 7. Grafik Pengaruh Vaksinasi terhadap Populasi Recovery

sitas Negeri Medan atas segala fasilitas yang diberikan.

Daftar Pustaka

[1] WHO, Transmisi SARS-CoV-2: implikasi terhadap kewaspadaan pencegahan infeksi, Pernyataan keilmuan, 2020

[2] Mona, N., 2020, Konsep Isolasi Dalam Jaringan Sosial Untuk Meminimalisasi Efek Contagious (Kasus Penyebaran Virus Corona Di Indonesia), *Jurnal Sosial Humaniora Terapan*, Vol. **2**(2):

[3] Fridalni, N., 2020, Mencegah Penularan Virus Corona. *Jurnal Abdimas Saintika*, Vol. **2**(1): 33 – 39

[4] Nasution, H., Sitompul, P., dan Sinaga, L., 2021, Effect of the Vaccine on the Dynamics of Speread of Tuberculosis SIRModels, *IOP Conf. Series, Journal of Physics* **1819**: 012062

[5] Sari, I.P., Widodo, S., 2020, Perkembangan Teknologi Terkini dalam Mempercepat Produksi Vaksin Covid-19, *Majalah Farmasetika*, Vol. **5**(5): 204 – 217

[6] Hill, E.M., Petrou, S., de Lusignan, S., Yonova, I., Keeling, M.J., 2019, Seasonal influenza: Modelling approaches to capture immunity propagation, *PLoS Comput. Biol.* **15**(10): e1007096

[7] Nasution, H., Sinaga, M., 2020, Mathematical Model Susceptible, Infected and Recovered with Therapy of Tuberculosis Transmission, *IOP Conf. Series, Journal of Physics* **1462**: 1 – 8

[8] Nasution, H., Jusuf, H., Ramadhani, E., Husein, I., 2020, Model of Spread of Infectious Diseases, *Sys Rev Pharm*, Vol. **11**(2): 685 – 689

[9] Asmaul, L. F., 2021, Analisis Pemodelan Matematika Penularan Covid-19 dengan Tindakan Rawat Inap di Rumah Sakit, *Jurnal Ilmiah Matematika*, Vol.

9(1): 126 – 132

[10] Sasmita, N.R., Ikhwan, M., Suyanto, S., Chongsuvivatwong, V., 2020, Optimal control on a mathematical model to pattern the progression of coronavirus disease 2019 (COVID-19) in Indonesia, *Global Health Research and Policy*, Vol. **5**(38): 1 – 12

[11] Data Sensus Penduduk Sumatera Utara, https://sumut.bps.go.id/

[12] Sugiyanto, M. A., 2020, A Mathematical Model of the Covid-19 Cases in Indonesia (Under and Without Lock-down Enforcement), *Biology, Medicine, dan Natural Product Chemistry*, Vol. **9**(1): 15 - 19