Jurnal Matematika UNAND
Vol. **3** No. **1** Hal. 85 – 88
ISSN : 2303–291X

INJEKSI TOTAL AJAIB PADA GRAF HUTAN

MUTIA SEPLINDA
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
mutia.seplinda@gmail.com

Abstrak. Untuk suatu graf hutan F, misalkan terdapat suatu injeksi $\mu : V(F) \cup E(F) \to N$. Jika untuk setiap titik $x \in V$ berlaku : $\mu(x) + \Sigma_{y\sim x}\mu(xy) = h$, dan untuk setiap sisi $xy \in E$ berlaku : $\mu(x) + \mu(xy) + \mu(y) = k$, untuk suatu bilangan bulat positif h dan k, maka μ dinamakan Injeksi Total Ajaib (*Totally Magic Injection*) disingkat sebagai TMI dari F. Jika terdapat TMI pada graf F, maka label terbesar pada TMI tersebut dinotasikan sebagai $m_t(F)$. Didefinisikan juga defisiensi total ajaib (*total deficiency*) dari F, dinotasikan $def_t(F)$, adalah $def_t(F) = m_t(F) - v - e$. Pada tulisan ini akan dikaji kembali paper [2] tentang injeksi Total Ajaib pada suatu graf Hutan F.

Kata Kunci: Injeksi total ajaib (TMI), defisiensi total ajaib

1. Pendahuluan

Terdapat banyak sekali istilah pada teori graf, salah satunya adalah injeksi. Suatu injeksi dari graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan bijektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan asli N yang *tidak harus terurut.* Apabila daerah asal dari pemetaan hanya berupa himpunan titik, maka injeksi disebut *injeksi titik.* Apabila daerah asalnya hanya berupa himpunan sisi, maka disebut *injeksi sisi.* Apabila daerah asal dari pemetaan merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka injeksi disebut juga *injeksi total.*

Suatu *injeksi titik ajaib* pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan bijektif μ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan asli N, sedemikian sehingga untuk setiap titik x di G berlaku : $\mu(x)+\Sigma_{y\sim x}\mu(xy) = h$, untuk suatu bilangan bulat positif h. Notasi $y \sim x$ menunjukkan y bertetangga dengan x.

Suatu *injeksi sisi ajaib* pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan bijektif μ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan asli N, sedemikian sehingga untuk setiap sisi xy di G berlaku : $\mu(x) + \mu(xy) + \mu(y) = k$, untuk suatu bilangan bulat positif k.

Untuk suatu graf sederhana G, misalkan terdapat suatu injeksi $\mu : V(G) \cup E(G) \to N$. Jika untuk setiap titik $x \in V$ berlaku : $\mu(x) + \Sigma_{y\sim x}\mu(xy) = h$, dan untuk setiap sisi $xy \in E$ berlaku : $\mu(x) + \mu(xy) + \mu(y) = k$, untuk suatu bilangan bulat positif h dan k, maka μ dinamakan Injeksi Total Ajaib (*Totally Magic Injection*) dari G, yang untuk selanjutnya disingkat sebagai TMI dari G. Jika terdapat TMI pada graf G, maka label terbesar pada TMI tersebut dinotasikan sebagai $m_t(G)$. Didefinisikan juga defisiensi total ajaib (*total deficiency*) dari G, dinotasikan $def_t(G)$, adalah $def_t(G) = m_t(G) - v - e$. Notasi v menyatakan banyaknya titik di G, dan e menyatakan banyaknya sisi di G. Semua konsep dasar dalam teori graf yang digunakan mengacu pada [1].

2. Teorema dan Lema Pendukung

Lema 2.1. [2] *Misalkan G memiliki $[m]$-TMI dengan konstanta titik h. Maka:*

(i) $h > m$,
(ii) $h = m$ *jika dan hanya jika G memiliki suatu isolat.*

Teorema 2.2. [2] *Misalkan G memiliki TMI. Maka setiap komponen dari G memiliki TMI.*

Teorema 2.3. [2] *Misalkan G tidak memiliki isolat. Maka $K_1 \cup G$ memiliki TMI jika dan hanya jika G memiliki TMI.*

Akibat 2.4. [2] *Misalkan G memiliki TMI μ dan tidak memiliki isolat. Maka μ dapat diperluas menjadi TMI dari $K_1 \cup G$, dengan konstanta titik dan sisi yang sama.*

Teorema 2.5. [2] *Misalkan G memiliki TMI. Maka berlaku salah satu:*

(i) G memiliki tepat satu isolat, dan semua komponen tersisa memiliki titik ≥ 3 dan memiliki TMI, atau,
(ii) Semua komponen dari G memiliki titik ≥ 3 dan memiliki TMI.

3. Injeksi Total Ajaib Pada Graf Hutan

Misalkan terdapat graf hutan $F = (V, E)$. Misal terdapat $\mu : V \cup E \rightarrow N$ yang merupakan injeksi Total Ajaib (TMI) dari F, dengan bobot titik:

$$\omega t(x) = \mu(x) + \Sigma_{y\sim x}\mu(xy) = h,$$

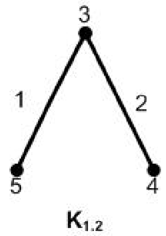
untuk suatu $x \in V$, dan bobot sisi:

$$\omega t(xy) = \mu(x) + \mu(xy) + \mu(y) = k,$$

untuk suatu $xy \in E$, dengan h dan k adalah suatu bilangan bulat positif.

Terdapat $m_t(F)$ yang merupakan bilangan bulat positif terbesar di N, sedemikian sehingga TMI $\mu : V \cup E \rightarrow N$. Terdapat pula defisiensi total ajaib dari F, yang dilambangkan dengan $def_t(F) = m_t(F) - v - e$, di mana v adalah banyaknya titik di F dan e adalah banyaknya sisi di F. jika F mempunyai TMI dengan $m_t(F) = v + e$ dan $def_t(F) = 0$, maka F dikatakan juga memiliki Pelabelan Total Ajaib (TML).

Misalkan suatu TMI μ mempunyai label terbesar m atau dapat ditulis $m_t(F) = m$, maka μ disebut sebagai $[m]$-injeksi total ajaib atau suatu $[m]$-TMI, dengan m dinamakan sebagai ukuran dari injeksi. Suatu $[m]$-TMI dari F adalah *minimal* jika F tidak memiliki $[m']$-TMI untuk setiap $m' < m$. Maka TMI yang demikian adalah TMI minimal atau $[m]$-TMI minimal.



Gambar 1. Graf $K_{1,2}$ yang memiliki TML, dengan $h = 6$ dan $k = 9$

Misalkan terdapat graf $F = K_{1,n}$ untuk $n \geq 2$. Berdasarkan Akibat 3.2 [3], telah dibuktikan bahwa satu-satunya graf bintang yang memiliki TML hanyalah $K_{1,2}$, karena itu $m_t(K_{1,2}) = v + e = 5$ dan $def_t(K_{1,2}) = 0$.

Pada Teorema 3.2 berikut disebutkan bahwa label terbesar pada graf bintang $K_{1,n}$ dengan $n \geq 3$ adalah $\binom{n+2}{2} - 2$.

Teorema 3.1. [2] *Misal terdapat graf bintang $K_{1,n}$ dengan banyak sisi n, $n \geq 3$. Maka $m_t(K_{1,n}) = \binom{n+2}{2} - 2$.*

Selanjutnya diperoleh

Akibat 3.2. [2] *Misal terdapat graf $K_1 \cup K_{1,n}$, dengan $n \geq 3$. Maka,*

$$m_t(K_1 \cup K_{1,n}) = \binom{n+2}{2}.$$

Selanjutnya, apabila suatu graf hutan F memiliki TMI, maka $m_t(F)$ adalah seperti dalam Teorema 3.3 berikut.

Teorema 3.3. [2] *Graf hutan F yang memiliki TMI hanyalah K_1, $K_{1,n}$ untuk $n \geq 2$, atau $K_1 \cup K_{1,n}$ untuk $n \geq 2$. Selanjutnya,*

$$m_t(F) = \begin{cases} 1, & \textit{jika } F = K_1, \\ 5, & \textit{jika } F = K_{1,2}, \\ 6, & \textit{jika } F = K_1 \cup K_{1,2}, \\ \binom{n+2}{2} - 2 & \textit{jika } F = K_{1,n}, n \geq 3, \\ \binom{n+2}{2} & \textit{jika } F = K_1 \cup K_{1,n}, n \geq 3. \end{cases}$$

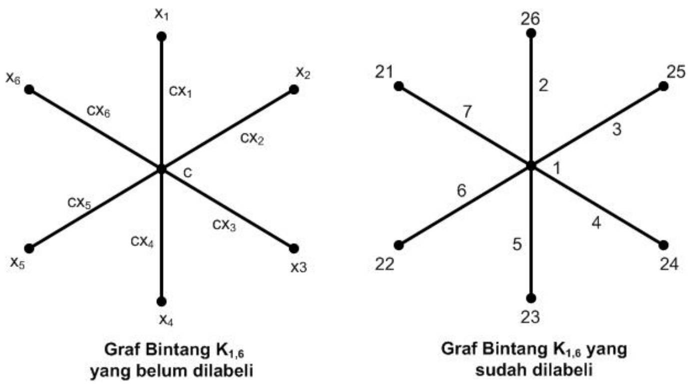
Setelah diperoleh $m_t(F)$, maka defisiensi total ajaib dari graf hutan F diberikan pada Teorema 3.4 berikut.

Teorema 3.4. [2] *Misalkan graf hutan F memiliki TMI. Maka defisiensi total ajaib dari graf hutan F adalah sebagai berikut.*

$$def_t(F) = \begin{cases} 0 & \textit{jika } F = K_1, K_{1,2}, \textit{ atau } K_1 \cup K_{1,2}, \\ \frac{n^2-n-4}{2} & \textit{jika } F = K_{1,n}, n \geq 3, \\ \frac{n^2-n-2}{2} & \textit{jika } F = K_1 \cup K_{1,n}, n \geq 3. \end{cases}$$

Contoh 3.5. Akan ditunjukkan bahwa terdapat $[m]$-injeksi total ajaib untuk graf $K_{1,6}$. Banyaknya titik pada $K_{1,6}$ adalah $v = n + 1 = 7$, dan sisi pada $K_{1,6}$ sebanyak

$e = n = 6$. Karena graf hutan $F = K_{1,6}$ tidak memiliki isolat, maka $m_t(K_{1,6}) = \binom{n+2}{2} - 2 = \binom{6+2}{2} - 2 = 26$. Sesuai Teorema 3.2, tetapkan $\mu(x_1) = 26$. Berikan label titik-titik $x_2, \cdots, x_6$ dengan $\mu(x_i) = m - (i-1)$ untuk $i = 2, \cdots, 6$, sehingga diperoleh himpunan label titik secara berurutan adalah $\{25, 24, 23, 22, 21\}$. Untuk label titik pusat c adalah 1, dan label sisi didefinisikan $\mu(cx_i) = (i+1)$, $i = 1, \cdots, 6$, sehingga diperoleh himpunan label sisinya adalah $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Bobot titik $h =$



Gambar 2. Graf $K_{1,6}$ dengan [26]-TMI minimal

$\binom{n+2}{2} = \binom{6+2}{2} = 28$, bobot sisi $k = \binom{n+2}{2} + 1 = \binom{6+2}{2} + 1 = 29$, $k - h = 1 = c$ dan defisiensi total ajaibnya adalah $def_t(K_{1,6}) = m_t(K_{1,6}) - v - e = 26 - 7 - 6 = 13$. Jadi, injeksi terhadap graf $K_{1,6}$ merupakan [26]-TMI minimal.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Lyra Yulianti, Bapak Narwen, Bapak Efendi, Bapak Budi Rudianto dan Ibu Hazmira Yozza yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bondy. J.A, dan Murty, U. S. R. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London

[2] Calhoun, B., Ferland, K., Lister, L., Polhill, J. 2005. Totally Magic Labelings of Graphs, *Austral. J. Combin.* **32**: 47 – 59

[3] Exoo, G., Ling, A. C. H., McSorley, J. P., Phillips, N. C., Wallis, W. D., 2002. Totally Magic Graphs, *Discrete Mathematics*. **254**: 103 – 113

[4] McSorley, John P. 2006. Totally Magic Injections of Graphs, *JCMCC*. **56**: 65 – 81