Jurnal Matematika UNAND
Vol. **3** No. **1** Hal. 89 – 92
ISSN : 2303–291X

PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF HALIN $G(2, n)$ UNTUK $n \geq 3$

YUNIZAR
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
yunizar_math@yahoo.com

Abstrak. Graf Halin adalah graf planar yang dibangun dari suatu *tree* T dan suatu *cycle* C yang menghubungkan setiap titik ujung dari *tree*. Dalam penelitian ini dikaji tentang pelabelan *graceful* pada graf Halin $G(2, n)$, untuk $n \geq 3$. Pelabelan ini didefinisikan menjadi dua kasus, yaitu kasus untuk n ganjil dan $n \geq 5$, dan kasus untuk n genap dan $n \geq 6$.

Kata Kunci: Graf Halin, Pelabelan graceful

1. Pendahuluan

Pelabelan graf menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas. Suatu pelabelan f dari suatu graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan satu-satu dari himpunan titik di G ke suatu himpunan bilangan bulat positif. Untuk setiap sisi $e = uv \in E(G)$, bobot yang diinduksi oleh f pada e ditulis $f(e)$, adalah $|f(u) - f(v)|$. Misalkan G adalah suatu graf berorde n dan ukuran m. Jika $f : V(G) \to \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ adalah suatu pelabelan dari G, sedemikian sehingga himpunan bobot yang diinduksi oleh f adalah $\{1, 2, \ldots, m\}$, maka f dikatakan pelabelan *graceful* dari G, dan G dinamakan graf *graceful*.

2. Teori Graf

2.1. *Definisi Graf dan Terminologi Graf*

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ terdiri atas himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dengan V adalah himpunan tak kosong dari titik *(vertex)* yang disebut himpunan titik, dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$, dimana anggotanya disebut sisi yang menghubungkan sepasang titik dan dinyatakan sebagai pasangan tak-terurut dari titik pada V [1].

Jika terdapat sisi $e = uv \in E(G)$, maka titik u disebut bertetangga dengan titik v dan demikian sebaliknya. Dalam hal ini, sisi e dikatakan terkait dengan titik u dan v, juga titik u dan v dikatakan terkait dengan sisi e. Banyak sisi yang terkait dengan titik v dinamakan derajat titik v, ditulis $d(v)$ [1].

2.2. *Graf Halin*

Suatu Graf Halin H adalah graf planar yang dibangun dengan menggambarkan sebuah *tree* T yang setidaknya terdiri dari empat titik pada suatu bidang, dimana T tidak memuat titik berderajat dua dan menghubungkan semua titik pada *tree* dengan *cycle* C.

Misalkan $G(k,l)$ merupakan graf planar yang mempunyai himpunan sisi E. Himpunan sisi E dapat didekomposisi ke dalam dua sub himpunan sisi yang saling lepas yaitu himpunan *tree* T dan himpunan *cycle* C, sehingga $E = T \cup C$ dan $T \cap C = \emptyset$. Sub graf dari $G(k,l)$ diinduksi pada T yang merupakan sebuah *tree* dengan satu titik u berderajat k, satu titik v berderajat l, u dan v bertetangga, dan sisanya $k+l-2$ titik berderajat satu dan sub graf yang diinduksi pada C. C adalah *cycle* dengan panjang $k+l-2$ yang melewati semua titik dari $G(k,l)$ kecuali u dan v [3]. Maka $G(k,l)$ adalah Graf Halin $G(k,l)$.

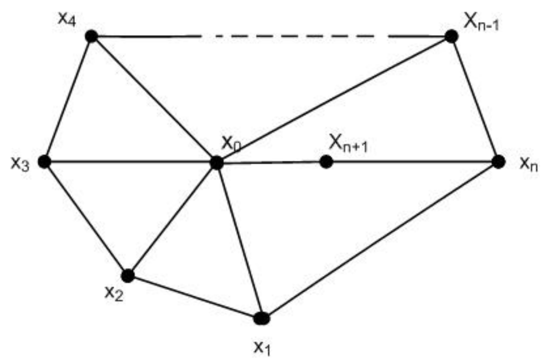
3. Pembahasan

Teorema 3.1. [*3*] *Graf Halin* $G(2,n)$ *adalah graceful.*

Bukti. Misalkan Graf Halin $G(2,n)$ dengan $n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\},$$
$$E = \{x_i x_{i+1} \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \cup \{x_0 x_j \mid j = 1, 2, \cdots, n-1\} \cup \{x_0 x_{n+1}, x_1 x_n\}.$$

Dalam hal ini berarti $|V| = n+2$ dan $|E| = 2n+1$. Sehingga graf $G(2,n)$ dapat digambarkan seperti dalam Gambar 1.



Gambar 1. Graf Halin $G(2,n)$

Untuk $n \geq 5$, konstruksikan pelabelan titik $f : V \to \{0, 1, 2, \ldots, 2n+1\}$ dengan cara sebagai berikut.

- **Kasus 1**. n ganjil dan $n \geq 5$.
Konstruksikan label titik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= 0, \\ f(x_n) &= 2n, \\ f(x_0) &= 2n+1, \\ f(x_{n-1}) &= 2n-1, \\ f(x_i) &= \begin{cases} i+1 & \text{jika } i \in \{1,3,\dots,n-2\}, \\ 2n-i & \text{jika } i \in \{2,4,\dots,n-3\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Selanjutnya, misalkan w menyatakan bobot sisi pada $G(2,n)$. Maka

(1) Untuk bobot sisi genap diperoleh

$$\begin{aligned} w(x_i x_{i+1}) &= 2(n-i-1) \text{ untuk } i \in \{1,2,\dots,n-3\}, \\ w(x_0 x_{n-1}) &= 2, \\ w(x_1 x_n) &= 2n-2, \\ w(x_n x_{n+1}) &= 2n. \end{aligned}$$

(2) Untuk bobot sisi ganjil diperoleh

$$\begin{aligned} w(x_0 x_i) &= \begin{cases} 2n-i & \text{untuk } i \in \{1,3,\dots,n-2\}, \\ i+1 & \text{untuk } i \in \{2,4,\dots,n-3\}, \end{cases} \\ w(x_{n-1} x_n) &= 1, \\ w(x_{n-2} x_{n-1}) &= n, \\ w(x_0 x_{n+1}) &= 2n+1. \end{aligned}$$

- **Kasus 2**. n genap dan $n \geq 6$.
Konstruksikan label titik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= 0, \\ f(x_n) &= 2n, \\ f(x_0) &= 2n+1, \\ f(x_1) &= 2, \\ f(x_2) &= 4, \\ f(x_3) &= 5, \\ f(x_i) &= \begin{cases} n+i & \text{jika } i \in \{4,6,\dots,n-2\}, \\ n-i+5 & \text{jika } i \in \{5,7,\dots,n-1\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Selanjutnya, misalkan w menyatakan bobot sisi pada $G(2,n)$. Maka

(1) Untuk bobot sisi genap diperoleh

$$\begin{aligned} w(x_i x_{i+1}) &= 2i-4 \text{ untuk } i \in \{4,5,\dots,n-1\}, \\ w(x_1 x_2) &= 2, \\ w(x_0 x_3) &= 2n-4, \\ w(x_1 x_n) &= 2n-2, \\ w(x_n x_{n+1}) &= 2n. \end{aligned}$$

(2) Untuk bobot sisi ganjil diperoleh

$$
\begin{aligned}
w(x_0x_i) &= \begin{cases} n-i+1 & \text{untuk } i \in \{4,6,\ldots,n-2\}, \\ n+i-4 & \text{untuk } i \in \{5,7,\ldots,n-1\}, \end{cases} \\
w(x_2x_3) &= 1, \\
w(x_3x_4) &= n-1, \\
w(x_0x_1) &= 2n-1, \\
w(x_0x_2) &= 2n-3, \\
w(x_0x_{n+1}) &= 2n+1.
\end{aligned}
$$

□

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa Graf Halin $G(2,n)$ adalah *graceful*. Pelabelan *graceful* pada Graf Halin $G(2,n)$ didefinisikan menjadi dua kasus, yaitu kasus untuk n ganjil dan $n \geq 5$, dan kasus untuk n genap dan $n \geq 6$. Pada masing-masing kasus diperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi yang berbeda. Akibatnya diperoleh bahwa Graf Halin $G(2,n)$ adalah *graceful*.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Budi Rudianto, Ibu Lyra Yulianti dan Bapak Efendi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J. A. and U. S. R. Murty. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London

[2] Gallian, J. 2003. *A dynamic survey of graph labeling*. The Electronic Journal of Combinatorics

[3] Kudlac, M. and S. Schrotter. 2006. *Graceful Labeling of Special Halin Graph*. Faculty of Electrical Engineering and Informatics, Kosice