

SYARAT AGAR SUATU GRAF DIKATAKAN BUKAN GRAF AJAIB TOTAL

MAHADMA PUTRA

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 mahadmaputra@yahoo.com*

Abstrak. Suatu graf dikatakan graf ajaib total apabila terdapat pelabelan total titik-ajaib dan total sisi-ajaib yang dapat dikenakan terhadap graf tersebut. Pada tulisan ini akan dikaji kembali hasil dari [1] yang memberikan beberapa syarat agar suatu graf dikatakan sebagai graf yang bukan graf ajaib total.

Kata Kunci: Pelabelan total sisi-ajaib, pelabelan total titik-ajaib

1. Pendahuluan

Suatu pelabelan dari graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan bijektif dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan asli. Apabila daerah asal dari pemetaan hanya himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Apabila daerah asalnya hanya himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi. Apabila daerah asal merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total.

Misal terdapat $G = (V, E)$ dengan $|V| = p$ dan $|E| = q$. Notasi $|V|$ berarti banyaknya titik pada G , sementara $|E|$ berarti banyaknya sisi pada G . Berikut ini adalah beberapa jenis pelabelan ajaib yang dapat dikenakan pada graf G . [1]

(1) Pelabelan sisi titik-ajaib.

Pelabelan sisi titik-ajaib pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan satu-satu λ_1 dari $E(G)$ pada himpunan $\{1, 2, \dots, q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap titik x di G berlaku:

$$\sum_{y \in N_x} \lambda_1(xy) = h,$$

untuk suatu bilangan bulat positif h , dimana N_x merupakan himpunan semua titik yang bertetangga dengan x .

(2) Pelabelan titik sisi-ajaib.

Pelabelan titik sisi-ajaib pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan satu-satu λ_2 dari $V(G)$ pada himpunan $\{1, 2, \dots, p\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi xy di G berlaku:

$$\lambda_2(x) + \lambda_2(y) = k,$$

untuk suatu bilangan bulat positif k .

(3) Pelabelan total titik-ajaib.

Suatu pelabelan total titik-ajaib pada graf G adalah pemetaan satu-satu λ_3 dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1, 2, \dots, p+q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap titik x di G berlaku:

$$\lambda_3(x) + \sum_{y \in N_x} \lambda(xy) = h,$$

untuk suatu bilangan bulat positif h , dimana N_x merupakan himpunan semua titik yang bertetangga dengan x .

(4) Pelabelan total sisi-ajaib.

Suatu pelabelan total sisi-ajaib pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan satu-satu λ_4 dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1, 2, \dots, p+q\}$ sedemikian hingga untuk setiap sisi xy di G berlaku:

$$\lambda_4(x) + \lambda_4(xy) + \lambda_4(y) = k,$$

untuk suatu bilangan bulat positif k .

2. Graf Ajaib Total

Misal λ adalah pelabelan total dari graf G . Maka bobot titik x , dinotasikan $\omega(x)$, dan bobot sisi xy , dinotasikan $\omega(xy)$, untuk pelabelan total λ adalah:

$$\omega(x) = \lambda(x) + \sum_{y \in N_x} \lambda(xy),$$

$$\omega(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y).$$

Definisi 2.1. [1] Suatu pelabelan total titik-ajaib pada graf G adalah pemetaan satu-satu μ dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1, 2, \dots, p+q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap titik x di G berlaku:

$$\omega(x) = \mu(x) + \sum_{y \in N_x} \mu(xy) = h,$$

untuk suatu bilangan bulat positif h . Jika terdapat pelabelan tersebut, maka G dikatakan graf titik-ajaib. Sementara h dikatakan konstanta titik-ajaib.

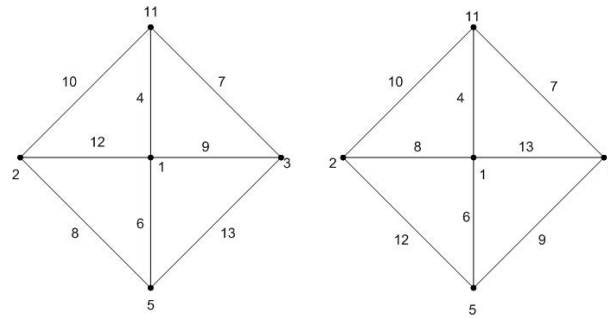
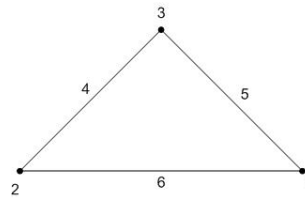
Definisi 2.2. [1] Suatu pelabelan total sisi-ajaib pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan satu-satu λ dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1, 2, \dots, p+q\}$ sedemikian hingga untuk setiap sisi xy di G berlaku:

$$\omega(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k,$$

untuk suatu bilangan bulat positif k . Jika terdapat pelabelan tersebut, maka G dikatakan graf sisi-ajaib. Sementara k dikatakan konstanta sisi-ajaib.

Pada Gambar 1 diberikan contoh pelabelan total titik-ajaib pada graf segitiga, dengan konstanta sisi-ajaib $k = 9$. Sementara pada Gambar 2 diberikan contoh pelabelan total sisi-ajaib terhadap W_4 , dengan konstanta titik-ajaib $h = 32$.

Suatu graf G dikatakan graf ajaib total apabila terdapat pelabelan total titik-ajaib, dengan konstanta titik-ajaib h , dan pelabelan total sisi-ajaib, dengan konstanta sisi-ajaib k , yang dapat dikenakan terhadap graf tersebut, dimana nilai k dan


 Gambar 1. Dua pelabelan titik-ajaib dari W_4 dengan $h = 32$

 Gambar 2. Pelabelan sisi-ajaib, dengan $k = 9$

nilai h tidak harus sama. Graf G dikatakan tidak ajaib total apabila graf tersebut tidak memenuhi syarat sebagai graf titik-ajaib atau sisi-ajaib.

3. Syarat Agar Suatu Graf Dikatakan Sebagai Graf yang Bukan Ajaib Total

Teorema 3.1. [1] *Jika suatu graf ajaib total G memuat dua titik yang bertetangga dengan derajat dua, maka komponen yang terkandung di dalamnya adalah sebuah siklus dengan panjang tiga.*

Bukti. Misalkan G memuat suatu pasangan titik b dan c yang bertetangga, masing-masing mempunyai derajat dua, dan misalkan λ adalah suatu pelabelan ajaib total dari graf G dengan bobot titik h dan bobot sisi k . Asumsikan graf G memuat sebuah lintasan a, b, c, d , dimana a dan d adalah titik yang berbeda, seperti diilustrasikan pada Gambar 3.


 Gambar 3. Ilustrasi komponen graf G .

Berdasarkan Definisi 2.1, maka haruslah $h = \omega(b) = \omega(c)$, yang berarti bahwa

$$\begin{aligned}\omega(b) &= \omega(c), \\ \lambda(ab) + \lambda(b) + \lambda(bc) &= \lambda(bc) + \lambda(c) + \lambda(cd), \\ \lambda(ab) + \lambda(b) &= \lambda(c) + \lambda(cd), \\ \lambda(c) &= \lambda(ab) + \lambda(b) - \lambda(cd),\end{aligned}\tag{3.1}$$

dan berdasar Definisi 2.2, maka haruslah

$$k = \lambda(a) + \lambda(ab) + \lambda(b) = \lambda(b) + \lambda(bc) + \lambda(c) = \lambda(c) + \lambda(cd) + \lambda(d),\tag{3.2}$$

yang berarti bahwa

$$\begin{aligned}\omega(ab) &= \omega(bc), \\ \lambda(a) + \lambda(ab) + \lambda(b) &= \lambda(b) + \lambda(bc) + \lambda(c), \\ \lambda(a) + \lambda(ab) &= \lambda(bc) + \lambda(c), \\ \lambda(c) &= \lambda(a) + \lambda(ab) - \lambda(bc).\end{aligned}\tag{3.3}$$

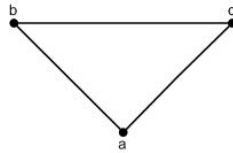
Dengan mensubstitusikan (3.1) ke (3.3) diperoleh:

$$\begin{aligned}\lambda(a) + \lambda(ab) - \lambda(bc) &= \lambda(ab) + \lambda(b) - \lambda(cd), \\ \lambda(a) - \lambda(bc) &= \lambda(b) - \lambda(cd), \\ \lambda(a) &= \lambda(b) + \lambda(bc) - \lambda(cd).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}\omega(bc) &= \omega(cd), \\ \lambda(b) + \lambda(bc) + \lambda(c) &= \lambda(c) + \lambda(cd) + \lambda(d), \\ \lambda(b) + \lambda(bc) &= \lambda(cd) + \lambda(d), \\ \lambda(d) &= \lambda(b) + \lambda(bc) - \lambda(cd).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Dari (3.4) dan (3.5) diperoleh bahwa $\lambda(a) = \lambda(d)$, sehingga haruslah $a = d$. Ini bertentangan dengan asumsi awal bahwa titik a dan d adalah dua titik yang berbeda. Sehingga, graf G haruslah memuat komponen berbentuk segitiga seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Komponen graf G .

Selanjutnya misalkan b dan c mempunyai satu tetangga yang sama, notasikan a , dan andaikan a mempunyai tetangga lainnya, namakan z . Dari (3.2),

$$\begin{aligned}\lambda(ab) &= k - \lambda(a) - \lambda(b), \\ \lambda(bc) &= k - \lambda(b) - \lambda(c).\end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}\omega(b) &= \lambda(ab) + \lambda(b) + \lambda(bc), \\ &= k - \lambda(a) - \lambda(b) + \lambda(b) + (k - \lambda(b) - \lambda(c)), \\ &= 2k - \lambda(a) - \lambda(b) - \lambda(c).\end{aligned}$$

Sementara,

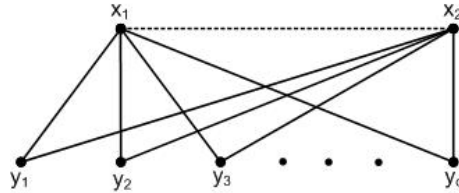
$$\begin{aligned}\omega(a) &= \lambda(ca) + \lambda(a) + \lambda(ab) + \lambda(az) + \cdots, \\ &\geq 2k - \lambda(a) - \lambda(b) - \lambda(c) + \lambda(az), \\ &> \omega(b), \text{ karena } \omega(a) > 0.\end{aligned}$$

□

Akibat 3.2. [1] Apabila suatu graf ajaib total memuat komponen berupa lintasan atau cycle, maka lintasan tersebut haruslah P_3 , serta siklus tersebut haruslah C_3 .

Teorema 3.3. [1] Misalkan G memuat dua titik, x_1 dan x_2 , yang keduanya bertetangga dengan $y_1, y_2, \dots, y_d$ dari titik lainnya. Kedua titik x_1 dan x_2 tidak harus bertetangga. Jika $d > 1$ maka G bukan graf ajaib total.

Bukti. Misalkan λ adalah suatu pelabelan total ajaib dari G dengan bobot titik dan bobot sisi h dan k . Tetapkan $\lambda(x_1x_2) = 0$ jika x_1 tidak bertetangga dengan x_2 . Maka:



Gambar 5. ilustrasi graf G .

$$h = \lambda(x_i) + \sum_{j=1}^d \lambda(x_i y_j) + \lambda(x_1 x_2), i = 1, 2, \quad (3.6)$$

$$k = \lambda(x_i) + \lambda(x_i y_j) + \lambda(y_j), i = 1, 2, 1 \leq j \leq d. \quad (3.7)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}dk &= d\lambda(x_i) + \sum_{j=1}^d \lambda(y_j) + \sum_{j=1}^d \lambda(x_i y_j), i = 1, 2, \\ &= (d-1)\lambda(x_i) + \sum_{j=1}^d \lambda(y_j) + (h - \lambda(x_1 x_2)).\end{aligned} \quad (3.8)$$

Sehingga diperoleh:

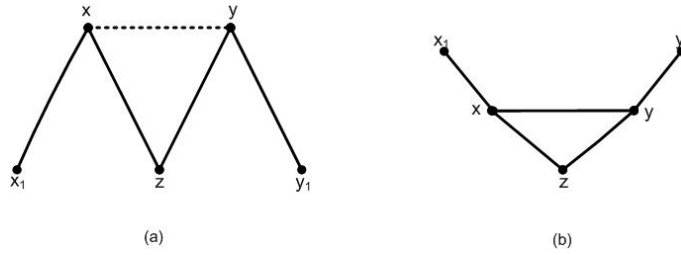
$$(d-1)\lambda(x_1) = (d-1)\lambda(x_2).$$

Ini adalah kontradiksi, kecuali $d = 1$ atau $\lambda(x_1) = \lambda(x_2)$. $\square$

Akibat 3.4. [1] Graf lengkap yang bersifat ajaib total adalah K_1 dan K_3 . Graf bipartit lengkap yang bersifat ajaib total adalah $K_{1,2}$.

Teorema 3.5. [1] Misalkan graf G memuat dua titik, x dan y , dengan satu tetangga bersama. Jika x dan y tidak bertetangga dan masing-masing berderajat dua, atau x dan y bertetangga dan masing-masing berderajat tiga, maka graf G bukan graf ajaib total.

Bukti. Tulis tetangga bersama dari x dan y dengan z , tetangga lain dari x dengan x_1 , dan tetangga lain dari y dengan y_1 (kemungkinan $x_1 = y_1$). Misalkan λ suatu pelabelan ajaib total dari graf G dengan bobot titik dan bobot sisi h dan k . Jika x tidak bertetangga dengan y di G maka definisikan $\lambda(xy) = 0$.



Gambar 6. (a) x dan y tidak bertetangga (b) x dan y bertetangga.

Bobot titik x adalah

$$\begin{aligned}
 h = \omega(x) &= \lambda(x) + \lambda(x_1x) + \lambda(xz) + \lambda(xy), \\
 &= \lambda(x) + k - (\lambda(x) + \lambda(x_1)) + k - (\lambda(x) + \lambda(z)) + \lambda(xy), \\
 &= 2k - \lambda(x) - \lambda(x_1) - \lambda(z) + \lambda(xy),
 \end{aligned}$$

sedangkan bobot titik untuk y adalah

$$\begin{aligned}
 h = \omega(y) &= \lambda(y) + \lambda(y_1y) + \lambda(yz) + \lambda(xy), \\
 &= \lambda(y) + k - (\lambda(y) + \lambda(y_1)) + k - (\lambda(y) + \lambda(z)) + \lambda(xy), \\
 &= 2k - \lambda(y) - \lambda(y_1) - \lambda(z) + \lambda(xy).
 \end{aligned}$$

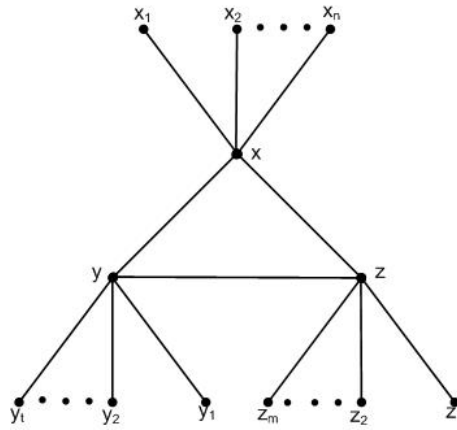
akibatnya

$$\begin{aligned}
 2k - \lambda(x) - \lambda(x_1) - \lambda(z) + \lambda(xy) &= 2k - \lambda(y) - \lambda(y_1) - \lambda(z) + \lambda(xy), \\
 \lambda(x) + \lambda(x_1) &= \lambda(y) + \lambda(y_1), \\
 k - \lambda(x_1x) &= k - \lambda(y_1y), \\
 \lambda(x_1x) &= \lambda(y_1y).
 \end{aligned}$$

Sehingga jelas G bukan graf ajaib total. $\square$

Teorema 3.6. [1] Misalkan graf ajaib total G memuat suatu segitiga. Maka jumlah dari label semua sisi di luar segitiga dan berkaitan dengan sebarang titik dari segitiga tersebut adalah sama, apapun titik yang dipilih.

Bukti. Namakan segitiga ini segitiga xyz . Tulis X untuk jumlah label dari semua sisi yang lain dari xy dan xz bertetangga dengan x , definisikan juga Y dan Z dengan cara yang sama. Pada Gambar 7 diperoleh bahwa



Gambar 7. ilustrasi graf G .

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda(x_i x), \quad Y = \sum_{j=1}^t \lambda(y_j y), \quad Z = \sum_{k=1}^m \lambda(z_k z).$$

Sehingga

$$\omega t(x) = \omega t(y) = \omega t(z),$$

dimana

$$\begin{aligned} h = \omega(x) &= \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(xz) + X, \\ &= \lambda(x) + k - \lambda(x) - \lambda(y) + k - \lambda(x) - \lambda(z) + X, \\ &= 2k - \lambda(x) - \lambda(y) - \lambda(z) + X, \end{aligned} \tag{3.9}$$

sedangkan

$$\begin{aligned} h = \omega(y) &= \lambda(y) + \lambda(xy) + \lambda(yz) + Y, \\ &= \lambda(y) + k - \lambda(x) - \lambda(y) + k - \lambda(y) - \lambda(z) + Y, \\ &= 2k - \lambda(x) - \lambda(y) - \lambda(z) + Y, \end{aligned} \tag{3.10}$$

dan

$$\begin{aligned} h = \omega(z) &= \lambda(z) + \lambda(xz) + \lambda(yz) + Z, \\ &= \lambda(z) + k - \lambda(x) - \lambda(z) + k - \lambda(y) - \lambda(z) + Z, \\ &= 2k - \lambda(x) - \lambda(y) - \lambda(z) + Z. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dari (3.9) – (3.11) jelas bahwa $X = Y = Z$. □

Akibat 3.7. [1] *Jika graf ajaib total G memuat suatu segitiga dengan satu titik berderajat dua, maka segitiga tersebut merupakan komponen dari G .*

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Lyra Yulianti, Bapak Zulakmal, Bapak Narwen, Bapak Budi Rudianto dan Bapak Syafruddin yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Exoo, G., C.C.H. Ling., J.P. Mc Sorley., N.C.K. Philips., W.D. Wallis. 2002. Totally Magic Graphs. *Discrete Mathematics*. **254**: 103 – 113
- [2] Mac Doughall, J., M. Miller., Slamin and W.D. Wallis. 2002. Vertex-magic total labelings. *Utilitas Math* **61**: 3 – 21
- [3] Baskoro, E. T., M. Miller., Slamin and W.D. Wallis. 2000. Edge-Magic Total Labelings. *Austral. J. Combin.* **22**: 177 – 190
- [4] West, D.B. 2001. *Introduction to Graph Theory*. Prentice-Hall, United States of America.
- [5] Baca, M. and M. Miller. 2008. *Super Edge Antimagic Graph*. Brown Walker Press, Boca Raton-Florida.