Jurnal Matematika UNAND
Vol. 1 No. 1 Hal. 34 – 37
ISSN : 2303–291X

PELABELAN TOTAL (a, d)-SISI ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF PERTEMANAN F_n

APRINALDI ANTONI

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas Padang,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
aprinaldiantoni@yahoo.co.id

Abstrak. Diberikan graf $G = (V, E)$. Suatu pemetaan bijektif g dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan positif $\{1, 2, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$ disebut pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib di G jika bobot sisi $w(xy) = g(x) + g(y) + g(xy), xy \in E(G)$, membentuk barisan aritmatika yang dimulai dari a dengan beda d. Suatu pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib disebut pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super jika $g(V(G)) = 1, 2, ..., |V(G)|$. Makalah ini mengkaji tentang pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada graf pertemanan.
***Kata kunci**: Pelabelan sisi antiajaib, bobot sisi*

1 Pendahuluan

Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$ dengan $V(G)$ dan $E(G)$ berturut-turut adalah himpunan titik dan himpunan sisi pada graf G. Banyaknya titik pada G dinotasikan sebagai $|V(G)| = p$, sementara banyaknya sisi pada G dinotasikan $|E(G)| = q$. Pelabelan graf [5] adalah suatu pemetaan atau fungsi yang memasangkan setiap unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bilangan bulat positif. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik**. Jika domainnya adalah sisi, maka disebut **pelabelan sisi**, dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut **pelabelan total**.

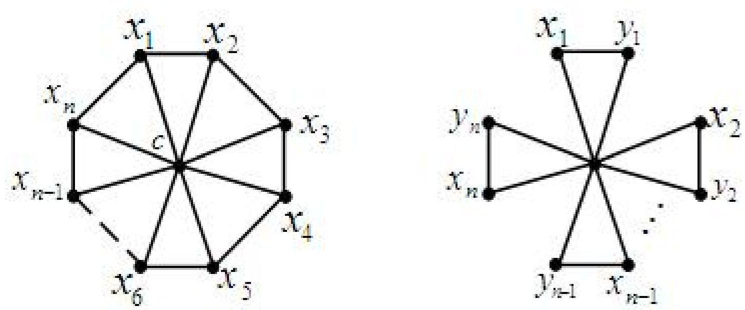
Dalam [3] dikatakan bahwa pelabelan total sisi ajaib pada graf G merupakan pelabelan total sisi ajaib super jika himpunan label titik $g(V(G)) = \{1, 2, \ldots, |V(G)|\}$. Misalkan terdapat pelabelan g pada graf G dengan titik-titik u dan v di $V(G)$, maka **bobot sisi** $e = uv$ didefinisikan sebagai $w(e) = g(u) + g(v) + g(uv)$. Sedangkan **bobot titik** $w(u)$ didefinisikan sebagai $w(u) = g(u) + \sum_{v \in N(u)} g(uv)$ untuk setiap $u \in V(G)$ dengan $N(u) = \{v|uv \in E(G)\}$.

Makalah ini merupakan tinjauan ulang dari rujukan pustaka [2]. Pada makalah ini penulis mengkaji kembali tentang pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada graf pertemanan F_n, dengan batasan $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$.

2 Graf Pertemanan

Graf Pertemanan F_n adalah graf terhubung yang berasal dari graf roda; yang diperoleh dengan cara menghilangkan sisi bagian luar, dengan ketentuan sisi luar yang tersisa tidak terhubung dengan sisi luar lainnya. Graf F_n mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} V(F_n) &= \{c\} \cup \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i \mid 1 \leq i \leq n\} \\ E(F_n) &= \{cx_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{cy_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i \mid 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$



Gambar 1. Graf Pertemanan F_n

3 Pelabelan Total (a, d)-Sisi Antiajaib Super Pada Graf Pertemanan

Pada bagian ini akan ditunjukkan kembali bahwa graf pertemanan F_n mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super dengan batasan $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$.

Teorema 1. *Untuk $n \geq 1$, jika graf pertemanan F_n memiliki pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super, maka $d < 3$.*

Bukti. Misalkan graf F_n memiliki pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super untuk $n \geq 1$. Maka bobot sisi F_n dapat ditulis sebagai $W = \{a, a+d, \ldots, a+(3n-1)d\}$ dengan bobot minimumnya adalah $2n+5$ dan bobot maksimumnya adalah $9n+2$. Karena $2n+5+(3n-1)d < 9n+2$ maka haruslah $d < \frac{(7n-3)}{3n-1}$. Untuk $n \geq 1$, berlaku $d < 3$. $\square$

Lema 1. *Graf pertemanan F_n mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib jika dan hanya jika $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$.*

Bukti. $(\Leftarrow)$ Misalkan $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$, akan ditunjukkan F_n mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib dengan himpunan label titik $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ dan himpunan label sisi $\{2n+2, 2n+3, \ldots, 5n+1\}$.

- Untuk $n = 1$, F_1 mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib dengan $g_1(c) = 1$, $g_1(x_1) = 2$ dan $g_1(y_1) = 3$.
- Untuk $n = 3$, F_3 mempunyai pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib dengan $g_2(c) = 4$, $g_2(x_1) = 1$, $g_2(y_1) = 3$, $g_2(x_2) = 2$, $g_2(y_2) = 6$, $g_2(x_3) = 5$ dan $g_2(y_3) = 7$.

– Untuk $n = 4$, F_4 mempunyai pelabelan titik $(a,1)$-sisi antiajaib dengan $g_3(c) = 6$, $g_3(x_1) = 1$, $g_3(y_1) = 5$, $g_3(x_2) = 2$, $g_3(y_2) = 3$, $g_3(x_3) = 4$, $g_3(y_3) = 8$, $g_3(x_4) = 7$ dan $g_3(y_4) = 9$.
– Untuk $n = 5$, F_5 mempunyai pelabelan titik $(a,1)$-sisi antiajaib dengan $g_4(c) = 6$, $g_4(x_1) = 1$, $g_4(y_1) = 5$, $g_4(x_2) = 2$, $g_4(y_2) = 3$, $g_4(x_3) = 4$, $g_4(y_3) = 8$, $g_4(x_4) = 7$, $g_4(y_4) = 11$, $g_4(x_5) = 9$ dan $g_4(y_5) = 10$.
– Untuk $n = 7$, F_7 mempunyai pelabelan titik $(a,1)$-sisi antiajaib dengan $g_5(c) = 8$, $g_5(x_1) = 1$, $g_5(y_1) = 5$, $g_5(x_2) = 3$, $g_5(y_2) = 4$, $g_5(x_3) = 2$, $g_5(y_3) = 6$, $g_5(x_4) = 7$, $g_5(y_4) = 9$, $g_5(x_5) = 10$, $g_5(y_5) = 14$, $g_5(x_6) = 12$, $g_5(y_6) = 13$, $g_5(x_7) = 11$ dan $g_5(y_7) = 15$.

($\Rightarrow$) Misalkan F_n mempunyai pelabelan total $(a,1)$-sisi antiajaib. Maka nilai n haruslah memenuhi ketaksamaan $\dfrac{3k}{4} \leq a \leq \dfrac{(3k+8)}{4}$ dan persamaan $4nk - 4k - n^2 + 15n + 4 = 6na$ untuk k genap, $2 \leq k \leq 2n$. Nilai n yang memenuhi adalah $n \in \{1,3,4,5,7\}$. $\square$

Teorema 2. *Untuk $n \in \{1,3,4,5,7\}$, graf pertemanan F_n memiliki pelabelan total $(a,0)$-sisi antiajaib super dan pelabelan total $(a,2)$-sisi antiajaib super.*

Bukti. Dari lema sebelumnya diperoleh pelabelan titik $g_i, 1 \leq i \leq 5$ untuk $F_n, n \in \{1,3,4,5,7\}$. Pelabelan g_1 adalah untuk F_1, g_2 untuk F_3, g_3 untuk F_4, g_4 untuk F_5 dan g_5 untuk F_7. Himpunan label titik F_n adalah $\{1,2,\ldots,2n+1\}$. Dengan melengkapi label sisi yang berada pada selang {2n+2,2n+3,...,5n+1}, maka diperoleh:

1. F_n memiliki pelabelan total $(a,0)$-sisi antiajaib super dan
2. F_n memiliki pelabelan total $(a,2)$-sisi antiajaib super. $\square$

Teorema 3. *Untuk $n \geq 1$, graf pertemanan F_n memiliki pelabelan total $(a,1)$-sisi antiajaib super.*

Bukti. Didefinisikan pelabelan titik $g_6 : V(F_n) \to \{1,2,\ldots,2n+1\}$ dan pelabelan sisi $g_7 : E(F_n) \to \{2n+2, 2n+3, \ldots, 5n+1\}$ sebagai berikut :

$g_6(c) = n+1$, $g_6(x_i) = i$ dan $g_6(y_i) = 2n+2-i$ untuk $1 \leq i \leq n$.

$$g_7(x_i c) = \begin{cases} 3n+3-\frac{i+1}{2}, & \textit{jika } i \text{ ganjil;} \\ 4n+3-\frac{i}{2}, & \textit{jika } i \text{ genap.} \end{cases}$$

$$g_7(y_i c) = \begin{cases} 2n+1+\frac{i+1}{2}, & \textit{jika } i \text{ ganjil;} \\ 3n+2+\frac{i}{2}, & \textit{jika } i \text{ genap.} \end{cases}$$

$$g_7(x_i y_i) = \begin{cases} 4n+2+i, & \textit{jika } 1 \leq i \leq n-1; \\ \frac{7n+5}{2}, & \textit{jika } i = n \text{ dan } n \text{ ganjil;} \\ \frac{5n+4}{2}, & \textit{jika } i = n \text{ dan } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Dengan memberikan pelabelan titik g_6 dan pelabelan sisi g_7 kepada F_n, maka dapat ditunjukkan bahwa himpunan bobot sisi dari F_n membentuk himpunan bilangan bulat terurut dengan $d = 1$ dan bobot total dari graf F_n yaitu $W = \{4n+4, 4n+5, \ldots, 7n+3\}$. $\square$

4 Kesimpulan

Misalkan terdapat graf pertemanan F_n dengan $2n+1$ titik, dimana $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$. Suatu graf dikatakan mempunyai pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib jika himpunan bobot sisinya dapat ditulis sebagai $W = \{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(q-1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$. Suatu pelabelan total g terhadap graf G dikatakan sebagai pelabelan super apabila $g(V(G)) = \{1, 2, \cdots, p\}$ dan $g(E(G)) = \{p+1, p+2, \cdots, p+q\}$.

Pada tulisan ini telah dikaji kembali bahwa graf F_n memiliki pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib super dengan batas $d < 3$. Selanjutnya telah dikaji pula bahwa untuk $n \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$, graf F_n mempunyai pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib super dengan $d \in \{0, 1, 2\}$.

5 Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Lyra Yulianti, Bapak Narwen, Bapak Admi Nazra dan Bapak Efendi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

6 Daftar Pustaka

1. Baca, M., Y. Lin, M. Miller and R. Simanjuntak. 2001. New construction of magic and antimagic graph labelings, *Utilitas Math.* **60**:229-239.
2. Baca, M., Y. Lin and M. Miller, M.Z. Youssef. 2007. Edge-antimagic graphs, *Discrete Mathematics.* **307**:1232-1244.
3. Enomoto, H., A.S. Lladó, T. Nakamigawa and G. Ringel. 1998. Super edge-magic graph, *SUT J. Math.* **34**:105-109.
4. Simanjuntak, R., F. Bertault and M. Miller. 2000. Two new (a,d)-antimagic graph labelings, in: *Proceedings of the 11th Australian Workshop of Combinatorial Algorithm*, 179-189.
5. West, D.B. 1996. *An Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.