

## KAJIAN PERILAKU MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT SIFILIS

ARDIANSYAH

*Program Studi Magister Matematika,  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,  
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia*

**Abstrak.** Penyebaran suatu penyakit merupakan salah satu ancaman terhadap manusia, terutama penyakit menular yang dibawa oleh bakteri. Akhir-akhir ini penyebaran bakteri sangat mengganggu kehidupan manusia, diantaranya adalah *treponema* penyebab penyakit sifilis. Tujuan penelitian ini adalah mengkaji perilaku dari model matematika SIRS dan SEIS penyebaran penyakit sifilis. Kajian tersebut meliputi pembentukan model matematika SIRS dan SEIS serta mengkaji perilaku stabilitas dari model SIRS dan SEIS penyebaran penyakit sifilis.

*Kata Kunci:* SIRS, SEIS, persamaan diferensial, titik tetap, stabil asimtotik

### 1. Latar Belakang

Penyebaran suatu penyakit merupakan salah satu ancaman terhadap manusia, terutama penyakit menular yang dibawa oleh bakteri, jamur, parasit dan virus. Penyakit sifilis merupakan salah satu penyakit fatal disebabkan oleh bakteri spirochete *treponema pallidum* subspecies *pallidum* yang dapat disebar/ditularkan melalui kontak langsung dengan penderita, atau bisa juga ditularkan secara tak langsung. Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika turut memberikan peranan penting dalam mengkaji proses penyebaran penyakit sifilis. Peranan tersebut dapat berupa abstraksi fenomena penyebaran penyakit sifilis kedalam bentuk model matematika. Studi tentang pemodelan matematika penyebaran penyakit sifilis sudah banyak dilakukan. Beberapa tipe model yang sering dijumpai berbentuk model SIRS dan SEIS. Pada dasarnya, model-model ini di bentuk dengan membagi populasi menjadi beberapa kelas. Model SIRS merupakan model yang diperoleh dengan membagi populasi menjadi tiga kelas, yaitu  $S$ ,  $I$ ,  $R$  dimana  $S(t)$  menyatakan banyaknya populasi yang rentan (*susceptible*) pada waktu  $t$ ,  $I(t)$  menyatakan banyaknya populasi yang terinfeksi pada waktu  $t$ , dan  $R(t)$  menyatakan banyaknya populasi yang sembuh pada waktu  $t$ . Model SIRS penyakit sifilis yang dibuat Milner dengan bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu - \beta IS - \mu S + \nu R, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS - \gamma I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R - \nu R,\end{aligned}\tag{1.1}$$

dimana parameter  $\beta$  menyatakan laju penularan dari populasi yang terinfeksi kepada populasi yang rentan,  $\mu$  menyatakan laju kematian/kelahiran populasi,  $\nu$  menyatakan laju kehilangan kekebalan populasi yang telah pulih,  $\gamma$  menyatakan laju kesembuhan alami populasi. Pada makalah ini, kedua model SIRS dan SEIS akan dikaji kembali, tetapi dengan asumsi bahwa laju kelahiran populasi tidak sama dengan laju kematian.

## 2. Definisi dan Terminologi

Dalam bagian ini disajikan beberapa materi dasar dari sistem persamaan diferensial yang merupakan model dari penyebaran penyakit sifilis. Suatu sistem persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang berbentuk

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

dimana  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$  dan  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$ .

Dalam mengkaji perilaku model matematika dari penyebaran penyakit sifilis, titik tetap dan kestabilan titik tetap tersebut memegang peranan penting. Suatu titik  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  dikatakan *titik tetap* dari sistem (2.1) jika  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ . Secara umum, kestabilan titik tetap sistem (2.1) dapat dimaknai sebagai solusi  $\mathbf{x}(t)$  dari sistem (2.1) yang pada mulanya cukup dekat dengan titik tetap, maka dengan berlalunya waktu  $\mathbf{x}(t)$  akan lebih dekat lagi dengan titik tersebut.

**Definisi 2.1.** Suatu titik tetap  $\mathbf{x}^*$  dari sistem (2.1) dikatakan stabil asimtotik jika untuk setiap keadaan awal  $\mathbf{x}_0$  berlaku

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^* \text{ bila } t \rightarrow \infty.$$

**Definisi 2.2.** Misalkan  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  adalah fungsi yang diferensiabel dan kontinu pada himpunan  $D \subset \mathbb{R}^n$  dan  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ . Matriks Jacobian dari  $\mathbf{f}$  disekitar  $\mathbf{x}^*$ , ditulis  $J_{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)}$  didefinisikan sebagai

$$J_{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Teorema berikut dapat digunakan untuk mengkaji apakah suatu titik tetap stabil asimtotik atau tidak.

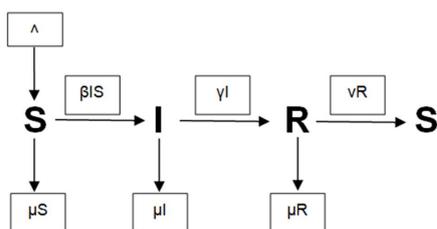
**Teorema 2.3.** Misalkan  $\mathbf{x}^*$  adalah titik tetap dari persamaan diferensial non linier (2.1). Jika bagian riil dari semua nilai eigen matriks Jacobian  $J$  di  $\mathbf{x}^*$  dari sistem (2.1) tersebut adalah negatif, maka titik tetap  $\mathbf{x}^*$  adalah stabil asimtotik.

### 3. Kajian Model Matematika SIRS dan SEIS

Dalam bab ini akan dikaji proses pembentukan model matematika SIRS dan SEIS dari penyebaran penyakit sifilis. Dalam memodelkan perilaku penyakit sifilis, populasi dipisahkan dalam beberapa kelas. Untuk model SIRS, populasi dibagi dalam tiga kelas, yaitu  $S$ ,  $I$ , dan  $R$ , dimana  $S(t)$  menyatakan banyaknya populasi yang rentan (susceptible) pada waktu  $t$ ,  $I(t)$  menyatakan banyaknya populasi yang terinfeksi pada waktu  $t$ , dan  $R(t)$  menyatakan banyaknya populasi yang sembuh pada waktu  $t$ . Dalam hal ini total populasi pada waktu  $t$  adalah  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ .

Untuk model SEIS, populasi dibagi dalam tiga kelas, yaitu  $S$ ,  $E$ , dan  $I$ , dimana  $E(t)$  menyatakan banyaknya populasi yang baru terinfeksi dan memasuki periode laten (masa inkubasi) pada waktu  $t$ . Dalam hal ini total populasi pada waktu  $t$  adalah  $N(t) = S(t) + E(t) + I(t)$ .

Secara ringkas, model matematika SIRS penyakit sifilis disajikan dalam diagram transfer pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Transfer Pemodelan SIRS

Diperoleh model SIRS berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \beta I(t)S(t) - \mu S(t) + \nu R(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t) - \nu R(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

dengan syarat awal  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$ , dan  $R(0) = R_0$ .

Dari sistem (3.1) diperoleh titik tetap

$$\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right) \text{ dan } \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, -\frac{(-\Lambda\beta + \mu^2 + \mu\gamma)(\mu + \nu)}{\beta\mu(\mu + \gamma + \nu)}, -\frac{\gamma(-\Lambda\beta + \mu^2 + \mu\gamma)}{\beta\mu(\mu + \gamma + \nu)}\right).$$

Titik tetap  $(S, I, R) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$  mempunyai nilai eigen  $\lambda_1 = -\mu$ ,  $\lambda_2 = -(\mu + \nu)$ ,  $\lambda_3 = -\frac{-\Lambda\beta + \mu^2 + \mu\gamma}{\mu}$ . Karena  $\lambda_3 > 0$ , maka titik tetap  $\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$  adalah tidak stabil asimtotik.

Selanjutnya titik tetap  $\left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, -\frac{(-\Lambda\beta + \mu^2 + \mu\gamma)(\mu + \nu)}{\beta\mu(\mu + \gamma + \nu)}, -\frac{\gamma(-\Lambda\beta + \mu^2 + \mu\gamma)}{\beta\mu(\mu + \gamma + \nu)}\right)$  mempunyai

nilai eigen

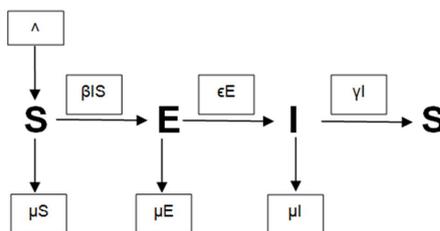
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2\mu(\mu + \gamma + \nu)} \left[ -A_1 + \sqrt{B_1} \right], \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2\mu(\mu + \gamma + \nu)} \left[ A_1 + \sqrt{B_1} \right], \end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned} A_1 &= \nu^2\mu + \Lambda\beta\nu + \Lambda\beta\mu + \nu\mu^2 \\ B_1 &= (4\mu^2\gamma^3\nu - 8\mu\gamma\Lambda\beta\nu^2 - 4\mu\gamma^2\Lambda\beta\nu - 16\mu^2\gamma\Lambda\beta\nu + \Lambda^2\beta^2\nu^2 + \Lambda^2\beta^2\mu^2 - 4\mu^4\gamma\nu \\ &\quad + 20\mu^3\gamma^2\nu + 20\mu^3\gamma\nu^2 + 8\mu^2\gamma^2\nu^2 + \nu^4\mu^2 + 4\mu^2\gamma\nu^3 + 6\nu^3\mu^3 + 13\mu^4\nu^2 + \\ &\quad 12\mu^5\nu + 4\mu^3\gamma^3 + 12\mu^5\gamma + 12\mu^4\gamma^2 - 2\nu^3\mu\Lambda\beta - 8\nu^2\mu^2\Lambda\beta + 2\Lambda^2\beta^2\mu\nu - \\ &\quad 10\Lambda\beta\mu^3\nu - 4\mu^2\gamma^2\Lambda\beta + 4\mu^6 - 8\mu^3\gamma\Lambda\beta)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nilai  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  negatif jika  $A_1 > \sqrt{B_1}$ . Jika ini terjadi, maka titik tetap  $\left( \frac{\mu+\gamma}{\beta}, -\frac{(-\Lambda\beta+\mu^2+\mu\gamma)(\mu+\nu)}{\beta\mu(\mu+\gamma+\nu)}, -\frac{\gamma(-\Lambda\beta+\mu^2+\mu\gamma)}{\beta\mu(\mu+\gamma+\nu)} \right)$  adalah stabil asimtotik.

Secara ringkas, model matematika SEIS penyakit sifilis disajikan dalam diagram transfer pada Gambar 2. Diperoleh model SEIS berikut.



Gambar 2. Diagram Transfer Pemodelan SEIS

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \beta I(t)S(t) - \mu S(t) + \gamma I(t), \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \beta I(t)S(t) - \epsilon E(t) - \mu E(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \epsilon E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

dengan syarat awal  $S(0) = S_0$ ,  $E(0) = E_0$ , dan  $I(0) = I_0$ .

Dari sistem (3.2) diperoleh titik tetap  $\left( \frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$  dan

$$\left( \frac{\epsilon\gamma + \epsilon\mu + \mu\gamma + \mu^2}{\beta\epsilon}, -\frac{(-\Lambda\beta\epsilon + \mu\epsilon\gamma + \epsilon\mu^2 + \mu^2\gamma + \mu^3)(\gamma + \mu)}{\beta\mu(\epsilon + \gamma + \mu)\epsilon}, -\frac{-\Lambda\beta\epsilon + \mu\epsilon\gamma + \epsilon\mu^2 + \mu^2\gamma + \mu^3}{\beta\mu(\epsilon + \gamma + \mu)} \right).$$

Titik tetap  $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$  mempunyai nilai eigen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\mu, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2\mu} \left[ A_2 - \sqrt{B_2} \right], \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2\mu} \left[ A_2 + \sqrt{B_2} \right],\end{aligned}$$

dimana

$$A_2 = \epsilon\mu + 2\mu^2 + \mu\gamma \text{ dan } B_2 = (\epsilon^2\mu^2 - 2\epsilon\mu^2\gamma + \mu^2\gamma^2 + 4\mu\Lambda\beta\epsilon)^{\frac{1}{2}}.$$

Nilai  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  adalah positif jika  $A_2 < \sqrt{B_2}$ . Jika hal ini terjadi, maka titik tetap  $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$  tidak stabil asimtotik.

Selanjutnya titik tetap

$$\left( \frac{\epsilon\gamma + \epsilon\mu + \mu\gamma + \mu^2}{\beta\epsilon}, -\frac{(-\Lambda\beta\epsilon + \mu\epsilon\gamma + \epsilon\mu^2 + \mu^2\gamma + \mu^3)(\gamma + \mu)}{\beta\mu(\epsilon + \gamma + \mu)\epsilon}, -\frac{-\Lambda\beta\epsilon + \mu\epsilon\gamma + \epsilon\mu^2 + \mu^2\gamma + \mu^3}{\beta\mu(\epsilon + \gamma + \mu)} \right)$$

mempunyai nilai eigen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\mu, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2\mu(\epsilon + \gamma + \mu)} \left[ A_3 - \sqrt{B_3} \right], \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2\mu(\epsilon + \gamma + \mu)} \left[ A_3 + \sqrt{B_3} \right],\end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned}A_3 &= \Lambda\beta\epsilon + 2\mu^2\gamma + 2\epsilon\mu^2 + \mu\epsilon\gamma + \mu^3 + \epsilon^2\mu + \mu\gamma^2, \\ B_3 &= (6\epsilon\gamma^3\mu^2 + 8\mu^3\gamma^3 + \mu^2\gamma^4 - 6\Lambda\beta\epsilon^2\mu\gamma - 2\Lambda\beta\epsilon\mu\gamma^2 - 4\Lambda\beta\epsilon^2\mu^2 - 2\Lambda\beta\epsilon\mu^3 - \\ &\quad 2\Lambda\beta\epsilon^3\mu + 18\mu^4\gamma^2 + 16\mu^5\gamma + 18\epsilon^2\mu^4 + 16\epsilon\mu^5 + 8\epsilon^3\mu^3 + \epsilon^4\mu^2 + \Lambda^2\beta^2\epsilon^2 + \\ &\quad 38\mu^4\gamma\epsilon + 28\mu^3\gamma^2\epsilon + 28\mu^3\gamma\epsilon^2 + 11\mu^2\gamma^2\epsilon^2 + 6\mu^2\gamma\epsilon^3 - 4\Lambda\beta\epsilon\mu^2\gamma + 5\mu^6)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Nilai  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  adalah negatif jika  $A_3 > \sqrt{B_3}$ . Jika hal ini terjadi, maka titik tetap

$$\left( \frac{\epsilon\gamma + \epsilon\mu + \mu\gamma + \mu^2}{\beta\epsilon}, -\frac{(-\Lambda\beta\epsilon + \mu\epsilon\gamma + \epsilon\mu^2 + \mu^2\gamma + \mu^3)(\gamma + \mu)}{\beta\mu(\epsilon + \gamma + \mu)\epsilon}, -\frac{-\Lambda\beta\epsilon + \mu\epsilon\gamma + \epsilon\mu^2 + \mu^2\gamma + \mu^3}{\beta\mu(\epsilon + \gamma + \mu)} \right)$$

adalah stabil asimtotik.

#### 4. Kesimpulan

Model matematika SIRS penyebaran penyakit sifilis sistem (3.1) mempunyai titik tetap sebagai berikut:

- (1)  $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$  yang bersifat tidak stabil asimtotik, dan
- (2)  $(\frac{\mu+\gamma}{\beta}, -\frac{(-\Lambda\beta+\mu^2+\mu\gamma)(\mu+\nu)}{\beta\mu(\mu+\gamma+\nu)}, -\frac{\gamma(-\Lambda\beta+\mu^2+\mu\gamma)}{\beta\mu(\mu+\gamma+\nu)})$ , yang stabil asimtotik.

Model matematika SEIS penyebaran penyakit sifilis sistem (3.2) mempunyai titik tetap sebagai berikut:

- (1)  $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$  yang bersifat tidak stabil asimtotik, dan
- (2)  $(\frac{\epsilon\gamma+\epsilon\mu+\mu\gamma+\mu^2}{\beta\epsilon}, -\frac{(-\Lambda\beta\epsilon+\mu\epsilon\gamma+\epsilon\mu^2+\mu^2\gamma+\mu^3)(\gamma+\mu)}{\beta\mu(\epsilon+\gamma+\mu)\epsilon}, -\frac{-\Lambda\beta\epsilon+\mu\epsilon\gamma+\epsilon\mu^2+\mu^2\gamma+\mu^3}{\beta\mu(\epsilon+\gamma+\mu)})$  yang stabil asimtotik.

**Daftar Pustaka**

- [1] Chin. J., 2000. *Manual Pemberantasan Penyakit Menular* (Terjemahan I Nyoman Kandun), Edisi 17. Departemen Kesehatan R.I., Jakarta
- [2] Kelley. W. G dan Peterson. A. C., 2010. *The Theory of Differential Equations*. Springer-Verlag., New York
- [3] Milner. F. A dan Zhao. R., 2010. *A New Mathematical Model of Syphilis*. *Mathematical Modeling of Natural Phenomena* **5**(6) : 96 – 108
- [4] Vargas. C., 2009. *Constructions of Lyapunov Functions for Classic SIS, SIR and SIRS Epidemic models with Variable Population Size*. UNAM., Mexico