

GRAF GARIS (*LINE GRAPH*) DARI GRAF SIKLUS, GRAF LENGKAP DAN GRAF BINTANG

IMELDA ROZA, NARWEN, ZULAKMAL

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
imeldaroza2003@gmail.com*

Abstrak. Graf G adalah himpunan pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari elemen-elemen yang disebut titik (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut dari titik-titik yang berbeda $V(G)$ dan disebut sisi (*edge*). Graf garis (*Line Graph*) adalah graf dengan $V(L(G)) = E(G)$, dimana untuk setiap $a, b \in E(G)$ maka a terhubung (*adjacent*) terhadap b di $L(G)$ jika dan hanya jika a dan b *adjacent* di G . Pada penelitian ini akan dibahas *line graph* dari graf siklus (C_n), graf lengkap (K_n) dan graf bintang (S_n), dengan $n \geq 3$.

Kata Kunci: *Line Graph*, graf siklus C_n , graf lengkap K_n , graf bintang S_n

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang menarik dan banyak dikembangkan. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan dapat diperlihatkan peranan dan kegunaan teori graf dalam memecahkan berbagai macam permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya. Selain itu graf dapat juga digunakan untuk merepresentasikan obyek-obyek diskrit dan hubungannya antara obyek-obyek tersebut. Dari sekian banyak konsep yang ada, salah satunya adalah tentang grup dan graf. Salah satu topik menarik dalam konsep grup dan graf adalah *line graph*, yang secara sederhana diartikan sebagai bentuk perubahan sisi (*edge*) menjadi titik (*vertex*). Sedangkan pengertian dari *line graph* adalah titik yang diambil dalam korespondensi satu-satu dari sisi graf G dan dinotasikan sebagai $L(G)$. Dikatakan dua titik dari $L(G)$ bertetangga (*adjacent*) jika dan hanya jika korespondensi sisi dari graf G juga bertetangga (*adjacent*). Pada makalah ini akan dibahas tentang bagaimana bentuk umum *line graph* dari graf siklus (C_n), graf lengkap (K_n) dan graf bintang (S_n).

2. Dasar Teori

Definisi 2.1. Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi.

Definisi 2.2. Sisi $e = uv$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = uv$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut bertetangga (adjacent). Selanjutnya, sisi e dikatakan terkait (incident) dengan titik u dan v .

Definisi 2.3. Matriks ketetanggaan untuk suatu graf dengan n titik didefinisikan sebagai $A_{n \times n} = [a_{ij}]$ dimana a_{ij} bernilai 1 jika titik v_i dan v_j bertetangga, dan bernilai 0 jika titik v_i dan v_j tidak bertetangga.

Definisi 2.4. Graf bipartisi lengkap adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi lengkap dinyatakan dengan $K_{m,n}$.

Definisi 2.5. Misal graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graf garis (line graph) $L(G)$ adalah graf dengan

$$V(L(G)) = E(G)$$

dan titik di $L(G)$ akan bertetangga jika dan hanya jika sisi-sisi yang bersesuaian saling terkait di G .

3. Pembahasan

Suatu graf G mempunyai graf lain sebagai graf garisnya, dinotasikan $L(G)$, jika dan hanya jika graf G mempunyai minimal satu sisi yang akan dijadikan titik di $L(G)$. Berikut adalah beberapa graf garis dari beberapa graf terhubung dengan struktur yang sederhana.

Definisi 3.1. Graf siklus C_n adalah graf terhubung sederhana yang setiap titiknya berderajat dua.

Teorema 3.2. Untuk $n \geq 3$, graf garis dari C_n , dinotasikan dengan $L(C_n)$ adalah graf C_n itu sendiri.

Bukti. Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf Siklus C_n , $n \geq 3$ masing-masing dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(G) &= \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}, \\ E(G) &= \{e_i \mid e_i = v_i v_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_1 v_n\}. \end{aligned}$$

Dari matriks ketetanggaan di atas terlihat bahwa v_1 bertetangga dengan v_2 , v_2 bertetangga dengan v_3 , v_3 bertetangga dengan v_4 , v_4 bertetangga dengan v_5 , begitu seterusnya hingga v_{n-1} bertetangga dengan v_n , dan v_n bertetangga dengan v_1 . Dengan demikian graf garis yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan orde n untuk $(n \geq 3)$ dapat dituliskan sebagai

$$L(C_n) \simeq C_n. \quad \square$$

Definisi 3.3. Graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap titiknya terhubung dengan titik lainnya.

$$\begin{array}{c}
 v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \quad \quad v_i \quad \quad v_n \\
 \begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 \dots \\
 v_i \\
 \dots \\
 v_n
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Definisi 3.4. Banyaknya sisi dalam suatu graf lengkap dengan n titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

Teorema 3.5. Suatu graf lengkap K_n dengan orde n memiliki graf garis $L(K_n)$ yang berbentuk graf $2(n-2)$ -regular, dengan $n \geq 3$.

Bukti. Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf lengkap K_n dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 V(G) &= \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}, \\
 E(G) &= \{v_i v_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}.
 \end{aligned}$$

Jika terdapat dua titik yang dihubungkan oleh satu sisi, maka graf garisnya adalah didapatkan satu titik baru dengan dua sisi. Sehingga jumlah titik akan berkurang satu dari bentuk semula. Sehingga derajat setiap titik juga akan berkurang satu menjadi $(n-2)$. Karena satu titik baru tersebut terhubung oleh dua sisi yang berderajat sama, sehingga didapatkan graf garis $L(K_n)$, dalam hal ini masing-masing titik mempunyai derajat $(n-2) + (n-2) = 2(n-2)$. Ini berarti graf garis $L(K_n)$ adalah graf $2(n-2)$ -regular. Dengan demikian graf garis yang dibentuk dari graf Siklus K_n dengan orde n untuk $(n \geq 3)$ dapat dituliskan sebagai,

$$L(K_n) \simeq 2(n-2) - \text{regular}. \quad \square$$

Definisi 3.6. Graf Bintang merupakan graf bipartisi lengkap yang berbentuk S_n dengan $n \geq 3$.

Teorema 3.7. Suatu graf bintang (S_n) dengan orde $n \geq 3$ memiliki graf garis yang berbentuk $L(S_n) \simeq K_{n-1}$.

Bukti. Misalkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf bintang S_n tersebut masing-masing dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 V(G) &= \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\}, \\
 E(G) &= \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \quad v_i \quad v_n \\
\begin{array}{l}
v_1 \\
v_2 \\
v_3 \\
v_4 \\
\vdots \\
v_i \\
\vdots \\
v_n
\end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Dari matriks ketetanggaan setiap sisi di atas terlihat bahwa v_1 bertetangga dengan v_2, v_3, v_4, v_i, v_n . v_2 bertetangga dengan v_1 . v_3 bertetangga dengan v_1 . v_4 bertetangga dengan v_1 . v_i bertetangga dengan v_1 . v_n bertetangga dengan v_1 . Dengan demikian graf garis yang dibentuk dari graf bintang S_n dengan orde n merupakan graf lengkap K_{n-1} . Sehingga dapat dituliskan sebagai

$$L(S_n) \simeq K_{n-1}. \quad \square$$

4. Kesimpulan

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa graf garis dari siklus C_n dengan orde $n \geq 3$ adalah siklus C_n , graf garis dari graf lengkap (K_n) dengan orde $n \geq 3$ adalah graf $2(n-2)$ -reguler, serta graf garis dari graf bintang (S_n) dengan orde $n \geq 3$ adalah graf lengkap K_{n-1} .

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Budi Rudianto, M.Si dan Bapak Syafruddin, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan.

Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G., Lesniak. L. 1996. *Graphs and Digraphs*. London
- [2] Gallian, J. 2003. *A dynamic survey of graph labeling*. The Electronic Journal of Combinatorics.
- [3] Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang
- [4] Rosen, Kenneth. H. 2003. *Discrete Mathematics and its Application*. 5th edition. Singapore, McGraw Hill
- [5] Wilson, Robin J., Watkins, John J. 1989. *Graphs: An Introductory Approach: A First Course in Discrete Mathematics*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.