

REALISASI FUNGSI TRANSFER DALAM BENTUK KANONIK TERKONTROL

NURWENI PUTRI

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 cahaya_surga95@yahoo.com*

Abstrak. Sistem kontrol merupakan suatu alat untuk mengendalikan dan mengatur keadaan dari suatu sistem. Dalam teori kontrol, suatu sistem dapat direpresentasikan dengan beberapa cara yang berbeda. Dalam penelitian ini akan dibahas cara menentukan representasi ruang keadaan dari fungsi transfer dalam bentuk kanonik terkontrol untuk sistem SISO dan MIMO. Dalam literatur, permasalahan ini dikenal dengan realisasi. Masalah ini ekuivalen dengan bagaimanakah cara menentukan matriks A, B, C dan D sedemikian sehingga $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, dimana matriks A, B, C dan D tersebut dalam bentuk kanonik terkontrol.

Kata Kunci: Fungsi transfer, realisasi, kanonik terkontrol

1. Pendahuluan

Diberikan suatu sistem kontrol

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

dimana $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Dalam hal ini $\mathbf{x}$ menyatakan variabel keadaan, $\mathbf{u}$ menyatakan variabel kontrol (input), $\mathbf{y}$ menyatakan output dan t menyatakan waktu [5].

Fungsi transfer untuk sistem (1.1) didefinisikan sebagai perbandingan transformasi Laplace output terhadap transformasi Laplace input dengan asumsi semua kondisi awal sama dengan nol dan dinotasikan dengan $H(s)$, yaitu

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}\tag{1.2}$$

dimana $Y(s)$ adalah transformasi Laplace dari $\mathbf{y}(t)$ dan $U(s)$ adalah transformasi Laplace dari $\mathbf{u}(t)$.

Dari definisi ini jelas bahwa jika diberikan suatu sistem kontrol linier, maka fungsi transfernya dengan mudah dapat ditentukan. Namun sebaliknya, jika diberikan suatu fungsi transfer $H(s)$, bagaimanakah bentuk dari sistem kontrol liniernya. Dalam literatur, masalah ini dikenal sebagai masalah realisasi. Masalah ini juga ekuivalen dengan bagaimanakah bentuk matriks A, B, C dan D dari suatu fungsi transfer $H(s)$ yang diberikan sedemikian sehingga

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.\tag{1.3}$$

Pada penelitian ini akan dikaji permasalahan realisasi dari fungsi transfer dalam bentuk kanonik terkontrol, yaitu jika diberikan suatu fungsi transfer, maka bagaimanakah bentuk representasi ruang keadaan yang berkaitan dengan matriks A, B, C dan D dimana matriks-matriks tersebut dalam bentuk kanonik terkontrol.

2. Realisasi dari Fungsi Transfer untuk Sistem SISO

Berikut akan diuraikan proses mendapatkan realisasi dari fungsi transfer suatu sistem SISO. Diberikan suatu fungsi transfer $H(s)$ sebagai berikut

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad (2.1)$$

dimana

$$Y(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0, \quad (2.2)$$

dan

$$U(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0. \quad (2.3)$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &= b_n + \frac{(b_{n-1} - b_n a_{n-1}) s^{n-1} + \cdots + (b_1 - b_n a_1) s + (b_0 - b_n a_0)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sehingga (2.4) dapat ditulis menjadi

$$Y(s) = b_n U(s) + \hat{Y}(s), \quad (2.5)$$

dimana

$$\begin{aligned} \hat{Y}(s) &= [(b_{n-1} - b_n a_{n-1}) s^{n-1} + \cdots + (b_1 - b_n a_1) s + (b_0 - b_n a_0)] Q(s) \\ &= (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) s^{n-1} Q(s) + \cdots + (b_1 - b_n a_1) s Q(s) \\ &\quad + (b_0 - b_n a_0) Q(s). \end{aligned} \quad (2.6)$$

dengan

$$Q(s) = \frac{U(s)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}. \quad (2.7)$$

Dengan demikian dari (2.7) diperoleh

$$\begin{aligned} U(s) &= s^n Q(s) + a_{n-1} s^{n-1} Q(s) + \cdots + a_1 s Q(s) + a_0 Q(s) \\ s^n Q(s) &= -a_{n-1} s^{n-1} Q(s) - \cdots - a_1 s Q(s) - a_0 Q(s) + U(s). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Selanjutnya definisikan

$$\begin{aligned} X_1(s) &= Q(s) \\ X_2(s) &= sQ(s) \\ X_3(s) &= s^2 Q(s) \\ &\vdots \\ X_n(s) &= s^{n-1} Q(s) \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= X_2(s) \\ sX_2(s) &= X_3(s) \\ &\vdots \\ sX_{n-1}(s) &= X_n(s) \end{aligned}$$

Dengan demikian (2.6) dan (2.8) menjadi

$$\begin{aligned} \hat{Y}(s) &= (b_{n-1} - b_n a_{n-1})sX_{n-1}(s) + \cdots + (b_1 - b_n a_1)sX_1(s) \\ &\quad + (b_0 - b_n a_0)X_1(s), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$sX_n(s) = -a_{n-1}sX_{n-1}(s) - \cdots - a_1sX_1(s) - a_0X_1(s) + U(s). \quad (2.10)$$

Berdasarkan (2.5) dan (2.6) diperoleh

$$\begin{aligned} Y(s) &= b_n U(s) + (b_{n-1} - b_n a_{n-1})sX_{n-1}(s) + \cdots + (b_1 - b_n a_1)sX_1(s) \\ &\quad + (b_0 - b_n a_0)X_1(s). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dengan menggunakan Laplace invers, maka dari (2.10) dan (2.11) diperoleh

$$\dot{x}_n = -a_{n-1}\dot{x}_{n-1} - \cdots - a_1\dot{x}_1 - a_0x_1 + u, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} y &= b_n u + (b_{n-1} - b_n a_{n-1})\dot{x}_{n-1} + \cdots + (b_1 - b_n a_1)\dot{x}_1 \\ &\quad + (b_0 - b_n a_0)x_1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Misalkan

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \end{aligned} \quad (2.14)$$

maka (2.14) dan (2.12) secara bersama-sama dapat ditulis menjadi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t),$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Dari (2.13) dan (2.14) diperoleh

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t),$$

dimana

$$C = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & \cdots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

dan

$$D = b_n. \quad (2.18)$$

3. Realisasi dari Fungsi Transfer untuk Sistem MIMO

Berikut akan diuraikan proses mendapatkan realisasi fungsi transfer dari suatu sistem MIMO yaitu memiliki lebih dari satu input dan output. Diberikan suatu fungsi transfer sebagai berikut

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{N_{11}(s)}{D_1(s)} & \cdots & \frac{N_{1m}(s)}{D_m(s)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{N_{p1}(s)}{D_1(s)} & \cdots & \frac{N_{pm}(s)}{D_m(s)} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Persamaan (3.1) dapat ditulis ulang

$$H(s) = N(s)D^{-1}(s). \quad (3.2)$$

dimana

$$N(s) = \begin{bmatrix} N_{11}(s) & \cdots & N_{1m}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{p1}(s) & \cdots & N_{pm}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

dan

$$D(s) = \text{diag} \begin{bmatrix} D_1(s) & D_2(s) & \cdots & D_m(s) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} D_j(s) &= s^{d_j} + a_{d_j-1}^j s^{d_j-1} + \cdots + a_1^j s + a_0^j \\ &= s^{d_j} + L_j S_j(s), \end{aligned}$$

dimana

$$L_j = \begin{bmatrix} a_0^j & a_1^j & \cdots & a_{d_j-1}^j \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

dan

$$S_j(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{d_j-1} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

untuk $j = 1, 2, \dots, m$. Dengan demikian (3.4) menjadi

$$\begin{aligned} D(s) &= \begin{bmatrix} s^{d_1} + L_1 S_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{d_2} + L_2 S_2(s) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^{d_m} + L_m S_m(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{d_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^{d_m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_m \end{bmatrix} S(s). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Tulis

$$\Lambda(s) = \text{diag} [s^{d_1} \quad s^{d_2} \quad \cdots \quad s^{d_m}], \quad (3.8)$$

$$L = \text{diag} [L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_m], \quad (3.9)$$

dan

$$S = \text{diag} [S_1(s) \quad S_2(s) \quad \cdots \quad S_m(s)], \quad (3.10)$$

maka (3.7) dapat ditulis menjadi

$$D(s) = \Lambda(s) + LS(s). \quad (3.11)$$

Dari (3.2) diperoleh

$$\begin{aligned} N(s) &= H(s)D(s) \\ N_{ij}(s) &= H_{ij}(s)D_j(s), \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.12)$$

dimana $N_{ij}(s)$ adalah elemen dari matriks polinomial $N(s)$ dan $D_j(s)$ adalah kelipatan persekutuan terkecil dari semua penyebut pada kolom j . Definisikan

$$H(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s), \quad (3.13)$$

maka untuk suatu fungsi transfer skalar $H_{ij}(s)$, berlaku

$$H_{ij}(s) - H_{ij}(\infty) = \frac{b_{d_j-1}^j s^{d_j-1} + \cdots + b_1^j s + b_0^j}{s^{d_j} + a_{d_j-1}^j s^{d_j-1} + \cdots + a_1^j s + a_0^j} = \hat{H}_{ij}(s) \quad (3.14)$$

dengan realisasi bentuk terkontrol sebagai berikut

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0^j & -a_1^j & -a_2^j & \cdots & -a_{n-1}^j \end{bmatrix}, \quad B_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dan

$$C_j = [b_0^j - b_{d_j}^j a_0^j \quad b_1^j - b_{d_j}^j a_1^j \cdots b_{d_j-1}^j - b_n^j a_{d_j-1}^j].$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}\hat{H}_{ij}(s)D_j(s) &= [H_{ij}(s) - H_{ij}(\infty)]D_j(s) \\ &= H_{ij}(s)D_j(s) - H_{ij}(\infty)D_j(s) \\ &= N_{ij}(s) - H_{ij}(\infty)D_j(s).\end{aligned}\quad (3.15)$$

Misalkan

$$N_{ij}(s) = b_{d_j}^j s^{d_j} + b_{d_j-1}^j s^{d_j-1} + \dots + b_1^j s + b_0^j, \quad (3.16)$$

maka dari (3.16) diperoleh

$$\begin{aligned}\hat{H}_{ij}(s)D_j(s) &= b_{d_j}^j s^{d_j} + b_{d_j-1}^j s^{d_j-1} + \dots + b_1^j s + b_0^j - b_{d_j}^j (s^{d_j} + a_{d_j-1}^j s^{d_j-1} + \dots \\ &\quad + a_1^j s + a_0^j) \\ &= b_{d_j-1}^j s^{d_j-1} + \dots + b_1^j s + b_0^j - a_{d_j-1}^j b_{d_j}^j s^{d_j-1} - \dots - a_1^j b_{d_j}^j s - a_0^j b_{d_j}^j \\ &= (b_{d_j-1}^j - a_{d_j-1}^j b_{d_j}^j) s^{d_j-1} + \dots + (b_0^j - a_0^j b_{d_j}^j).\end{aligned}\quad (3.17)$$

Tulis

$$C_j = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_k], \quad (3.18)$$

dimana

$$\beta_k = b_k^j - a_k^j b_{d_j}^j, \quad k = 0, 1, \dots, d_j - 1, \quad (3.19)$$

maka berdasarkan (3.6) dan (3.18), persamaan (3.17) dapat ditulis menjadi

$$\hat{H}_{ij}(s)D_j(s) = C_j S_j(s). \quad (3.20)$$

Jika $\hat{H}_{ij}(s)$ adalah elemen dari $\hat{H}(s)$, maka berdasarkan (3.15) berlaku

$$\begin{aligned}\hat{H}(s)D(s) &= CS(s) \\ N(s) - H(\infty)D(s) &= CS(s) \\ N(s) &= CS(s) + H(\infty)D(s),\end{aligned}$$

dimana

$$C = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_m]. \quad (3.21)$$

Sehingga dari (1.3) dan (3.1) diperoleh

$$\begin{aligned}N(s)D^{-1}(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ [CS(s) + H(\infty)D(s)]D^{-1} &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ CS(s)D^{-1}(s) + H(\infty) &= C(sI - A)^{-1}B + D.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Akibatnya diperoleh

$$D = H(\infty), \quad (3.23)$$

dan

$$\begin{aligned}S(s)D^{-1}(s) &= (sI - A)^{-1}B \\ BD(s) &= (sI - A)S(s).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 B_j D_j(s) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (s^{d_j} + a_{d_j-1}^j s^{d_j-1} + \cdots + a_1^j s + a_0^j) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s^{d_j} + a_{d_j-1}^j s^{d_j-1} + \cdots + a_1^j s + a_0^j \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s & -1 \\ a_0^j & a_1^j & a_2^j & \cdots & a_{d_j-2}^j & s + a_{d_j-1}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{d_j-2} \\ s^{d_j-1} \end{bmatrix} \\
 &= (sI - A_j) S_j(s), \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Akibatnya dari (3.24) diperoleh

$$A = \text{diag} [A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_m] \tag{3.26}$$

dimana

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^j & -a_1^j & -a_2^j & \cdots & -a_{d_j-2}^j & -a_{d_j-1}^j \end{bmatrix}$$

dan

$$B = \text{diag} [B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_m] \tag{3.27}$$

dengan

$$B_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Penutup

Misalkan $H(s)$ adalah suatu fungsi transfer sedemikian sehingga

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (4.1)$$

Jika $H(s)$ berbentuk fungsi skalar maka realisasi dari $H(s)$ adalah

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$C = [b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad \cdots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}], \quad (4.4)$$

$$D = b_n. \quad (4.5)$$

Jika $H(s)$ berbentuk suatu matriks, maka realisasi dari $H(s)$ adalah

$$A = \text{diag} [A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_m], \quad (4.6)$$

$$B = \text{diag} [B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_m], \quad (4.7)$$

$$C = [C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_m], \quad (4.8)$$

$$D = H(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s), \quad (4.9)$$

dimana masing-masing A_j berbentuk seperti (4.2), masing-masing B_j berbentuk seperti (4.3), dan masing-masing C_j berbentuk seperti (4.4).

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Muhafzan, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Ibu Arrival Rince Putri, M.T, M.Si dan Bapak Bukti Ginting, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Alok, S. 2007. *Linear Systems Optimal and Robust Control*. CRC Press, Francis.
- [2] Antsaklis, P. J dan Anthony N, Michel. 2007. *A Linear Systems Primer*. Birkhauser, Boston.
- [3] Hendricks E, Jannerup, O dan Sorensen, P. H. 2008. *Linear System Control*. Springer, Heidelberg.
- [4] Kaczorek, T. 1992. *Linear Control System*. Galliard, Great Yarmouth.
- [5] Ogata, K. 2002. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, New Jersey.