

PENGGUNAAN METODE LYAPUNOV UNTUK MENGUJI KESTABILAN SISTEM LINIER

OKTAVIA LOVE LINA

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 oktavialovel@gmail.com*

Abstrak. Pada paper ini dikaji tentang penggunaan metode Lyapunov dalam menguji kestabilan sistem linier. Metode Lyapunov menggunakan suatu fungsi diferensiabel dan kontinu $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ yang dapat dinyatakan sebagai fungsi jarak diperumum dari titik tetap $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Sifat kestabilan disimpulkan dari sifat $V(\mathbf{x})$ dan turunan $V(\mathbf{x})$ terhadap waktu. Pengkajian diutamakan pada matriks A yang non singular, yakni $\det(A) \neq 0$.

Kata Kunci: Metode Lyapunov, kestabilan sistem, titik tetap

1. Pendahuluan

Diberikan suatu sistem linier sebagai berikut.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.1)$$

dimana $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ menyatakan keadaan, $t \in \mathbb{R}_+$ menyatakan waktu dan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Salah satu kajian utama dalam sistem linier adalah kajian tentang kestabilan dari titik tetap sistem tersebut. Suatu titik $\mathbf{x}^*$ dikatakan titik tetap dari sistem (1.1) jika $A\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Secara sederhana, titik tetap $\mathbf{x}^*$ dari sistem (1.1) dikatakan stabil jika kurva solusi (trayektori) yang berawal dari $\mathbf{x}_0$ yang pada mulanya dekat dengan titik tetap tersebut, maka dengan berlalunya waktu kurva solusi tersebut tetap dekat dengan titik tetap tersebut. Jika titik tetap dari sistem (1.1) adalah stabil maka sistem (1.1) dikatakan stabil. Terdapat berbagai tipe kestabilan yang dikenal dalam sistem linier, misalnya kestabilan asimtotik, kestabilan eksponensial, dan lainnya. Pada paper ini akan dikaji masalah kestabilan dan kestabilan eksponensial sistem linier (1.1) dengan menggunakan metode Lyapunov.

2. Penggunaan Metode Lyapunov untuk Menguji Kestabilan Sistem Linier

Berikut ini disajikan definisi dari kestabilan dan kestabilan eksponensial di titik tetap untuk sistem linier (1.1).

Definisi 2.1. Titik tetap $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ dikatakan stabil jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat suatu $\delta(\epsilon) > 0$ sehingga

$$\|\mathbf{x}_0\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|\phi(t, \mathbf{x}_0)\| < \epsilon$$

untuk setiap $t \geq 0$, dimana $\phi(t, \mathbf{x}_0)$ adalah solusi dari sistem linier (1.1) yang melalui $\mathbf{x}_0$ pada waktu t .

Definisi 2.2. Titik tetap $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ dari sistem (1.1) dikatakan stabil eksponensial jika terdapat $\alpha > 0$ dan untuk sebarang $\beta > 0$ terdapat $k(\beta) > 0$ sedemikian sehingga

$$\|\mathbf{x}_0\| < \beta \Rightarrow \|\phi(t, \mathbf{x}_0)\| \leq k(\beta)\|\mathbf{x}_0\|e^{-\alpha t}$$

untuk setiap $t \geq 0$.

Penggunaan Definisi 2.1 dan Definisi 2.2 untuk menentukan apakah suatu titik tetap adalah stabil dan stabil eksponensial memerlukan penyelesaian dari persamaan diferensial linier (1.1). Selanjutnya metode Lyapunov akan digunakan untuk menentukan kestabilan dan kestabilan eksponensial dari suatu sistem linier. Metode Lyapunov menggunakan suatu fungsi diferensiabel dan kontinu $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ yang dapat dipandang sebagai fungsi jarak diperumum dari titik tetap $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Selanjutnya, sifat kestabilan disimpulkan dari sifat $V(\mathbf{x})$, dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dan turunan $\dot{V}(\mathbf{x})$ terhadap waktu, yaitu $\dot{V}(\mathbf{x})$.

Dalam [1] dinyatakan bahwa salah satu pilihan yang sederhana dari fungsi Lyapunov adalah $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$. Fungsi $V(\mathbf{x})$ ini merupakan jarak antara keadaan dari sistem (1.1) dengan titik tetap $\mathbf{0}$. Sifat kestabilan dari titik tetap $\mathbf{0}$ diuji dengan melihat perilaku dari $\dot{V}(\mathbf{x})$. Jelas bahwa

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{x}} \\ &= (A\mathbf{x})^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T (A\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^T A^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (A^T + A) \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Jika A adalah suatu matriks sedemikian sehingga $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ untuk setiap $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, maka cukup beralasan untuk menyatakan bahwa jarak keadaan $\mathbf{x}$ dari $\mathbf{0}$ adalah berkurang dengan bertambahnya waktu. Oleh karena itu, keadaan $\mathbf{x}$ cenderung menuju titik tetap $\mathbf{0}$ dengan bertambahnya waktu. Sebagai perumuman dari $V(\mathbf{x})$ diatas, pemilihan fungsi Lyapunov yang lain adalah $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$, dimana $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah simetris. Turunan terhadap waktu dari $V(\mathbf{x})$ terhadap t adalah

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \\ &= \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} \\ &= (A\mathbf{x})^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P (A\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^T A^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P A \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (A^T P + P A) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T C \mathbf{x}, \end{aligned}$$

dimana

$$C = A^T P + P A. \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) disebut sebagai persamaan matriks Lyapunov [1].

Teorema 2.3. *Titik tetap $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dari persamaan (1.1) adalah stabil jika terdapat suatu matriks riil simetris definit positif P berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga matriks C pada (2.1) adalah semidefinit negatif.*

Bukti. Misalkan terdapat suatu matriks riil simetris definit positif P berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga matriks C pada (2.1) adalah semidefinit negatif. Selain itu, misalkan pula $\phi(t, x_0) \triangleq \phi(t)$ adalah solusi dari persamaan (1.1) yang melalui titik $\mathbf{x}_0$, maka

$$\begin{aligned}\phi(t)^T P \phi(t) &= \phi(0)^T P \phi(0) + \int_0^t \frac{d}{d\eta} \phi(\eta)^T P \phi(\eta) d\eta \\ &= \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0 + \int_0^t \frac{d}{d\eta} \phi(\eta)^T P \phi(\eta) d\eta \\ &= \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0 + \int_0^t \left[\frac{d}{d\eta} \phi(\eta)^T P \phi(\eta) + \phi(\eta)^T P \frac{d}{d\eta} \phi(\eta) \right] d\eta \\ &= \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0 + \int_0^t [(A\phi(\eta))^T P \phi(\eta) + \phi(\eta)^T P A \phi(\eta)] d\eta \\ &= \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0 + \int_0^t [\phi(\eta)^T A^T P \phi(\eta) + \phi(\eta)^T P A \phi(\eta)] d\eta \\ &= \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0 + \int_0^t [\phi(\eta)^T [A^T P + P A] \phi(\eta)] d\eta \\ &= \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0 + \int_0^t [\phi(\eta)^T C \phi(\eta)] d\eta.\end{aligned}$$

Sehingga

$$\phi(t)^T P \phi(t) - \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0 = \int_0^t [\phi(\eta)^T C \phi(\eta)] d\eta$$

untuk semua $t \geq 0$. Karena matriks C adalah semidefinit negatif dan matriks P adalah definit positif, maka

$$\phi(t)^T P \phi(t) - \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0 = \int_0^t [\phi(\eta)^T C \phi(\eta)] d\eta \leq 0,$$

untuk semua $t \geq 0$, atau dapat ditulis

$$\phi(t)^T P \phi(t) \leq \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0.$$

Terdapat skalar-skalar $\lambda_M(P) \geq \lambda_m(P) > 0$ sedemikian sehingga

$$\lambda_m(P) \|\phi(t)\|^2 \leq \phi(t)^T P \phi(t) \leq \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0 \leq \lambda_M(P) \|\mathbf{x}_0\|^2,$$

atau dapat ditulis

$$\|\phi(t)\| \leq \left(\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)} \right)^{1/2} \|\mathbf{x}_0\|$$

untuk semua $t \geq 0$ dan untuk setiap $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Misalkan $\epsilon > 0$ sebarang dan pilih $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\left(\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)} \right)^{1/2}}$. Maka berdasarkan Definisi 2.1 diperoleh

$$\|\mathbf{x}_0\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|\phi(t)\| \leq \left(\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)} \right)^{1/2} \|\mathbf{x}_0\| < \epsilon.$$

Dengan demikian titik tetap $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah stabil. $\square$

Teorema 2.4. *Titik tetap $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dari persamaan (1.1) adalah stabil eksponensial jika terdapat suatu matriks riil simetris definit positif P berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga matriks C pada persamaan (2.1) adalah definit negatif.*

Bukti. Misalkan $\phi(t, x_0) \triangleq \phi(t)$ adalah solusi dari persamaan (1.1) yang melalui titik $\mathbf{x}_0$. Misalkan terdapat matriks definit positif P sedemikian sehingga matriks C adalah definit negatif, maka terdapat $\lambda_M(P) \geq \lambda_m(P) > 0$ dan $\lambda_M(-C) \geq \lambda_m(-C) > 0$ sedemikian sehingga

$$\lambda_m(P)\|\phi(t)\|^2 \leq V(\phi(t)) = \phi(t)^T P \phi(t) \leq \lambda_M(P)\|\phi(t)\|^2$$

dan

$$-\lambda_M(C)\|\phi(t)\|^2 \leq \dot{V}(\phi(t)) = \phi(t)^T C \phi(t) \leq -\lambda_m(C)\|\phi(t)\|^2$$

untuk semua $t \geq 0$. Maka

$$\begin{aligned} \dot{V}(\phi(t)) &= \frac{d}{dt} [\phi(t)^T P \phi(t)] \leq \left(\frac{-\lambda_m(C)}{\lambda_m(P)} \right) \phi(t)^T P \phi(t) \\ &= \left(\frac{-\lambda_m(C)}{\lambda_m(P)} \right) V(\phi(t)). \end{aligned}$$

untuk semua $t \geq t_0$. Dengan mengintegrasikan fungsi tersebut dari 0 sampai t diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\phi(t)^T P \phi(t)] &\leq \left(\frac{-\lambda_m(C)}{\lambda_m(P)} \right) \phi(t)^T P \phi(t) \\ \Leftrightarrow \frac{d [\phi(t)^T P \phi(t)]}{\phi(t)^T P \phi(t)} &\leq \left(\frac{-\lambda_m(C)}{\lambda_m(P)} \right) dt \\ \Leftrightarrow \int_0^t \frac{d [\phi(t)^T P \phi(t)]}{\phi(t)^T P \phi(t)} &\leq \int_0^t \left(\frac{-\lambda_m(C)}{\lambda_m(P)} \right) dt \\ \Leftrightarrow \ln [\phi(t)^T P \phi(t)] \Big|_0^t &\leq \left(\frac{-\lambda_m(C)}{\lambda_m(P)} \right) t \Big|_0^t \\ \Leftrightarrow \ln [\phi(t)^T P \phi(t)] - \ln [\phi(0)^T P \phi(0)] &\leq - \left(\frac{\lambda_m(C)}{\lambda_m(P)} \right) t \\ \Leftrightarrow \ln [\phi(t)^T P \phi(t)] &\leq \ln [\phi(0)^T P \phi(0)] - \left(\frac{\lambda_m(C)}{\lambda_m(P)} \right) t \\ \Leftrightarrow \phi(t)^T P \phi(t) &\leq \phi(0)^T P \phi(0) e^{-\left(\frac{\lambda_m(C)}{\lambda_m(P)} \right) t} \\ \Leftrightarrow \phi(t)^T P \phi(t) &\leq \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0 e^{-\left(\frac{\lambda_m(C)}{\lambda_m(P)} \right) t} \end{aligned}$$

atau

$$\lambda_m(P)\|\phi(t)\|^2 \leq \phi(t)^T P \phi(t) \leq \lambda_M(P)\|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\left(\frac{\lambda_m(C)}{\lambda_m(P)} \right) t}$$

atau

$$\|\phi(t)\| \leq \left(\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)} \right)^{1/2} \|\mathbf{x}_0\| e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_m(C)}{\lambda_m(P)} \right) t}$$

untuk semua $t \geq 0$. Berdasarkan Definisi 2.2, titik tetap $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah stabil eksponensial. $\square$

3. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Muhafzan, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Ibu Arrival Rince Putri, M. T, M. Si, dan Ibu Dr. Susila Bahri yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Antsaklis, P. J dan Michel, A. N. 2007. *A Linear Systems Primer*. Birkhauser. Boston
- [2] Cullen, C.G. 1987. *Linear Algebra and Differential Equations*. 2th.ed PWS Kent. Boston
- [3] Hendricks. E, Ole. J dan P. H. Soronsen. 2008. *Linear System Control*. Springer. Berlin
- [4] Horn, R. A dan Johnson, C. R. 1985. *Matrix Analysis*. Cambridge University. Cambridge
- [5] Khalil, H. K dan Grizzle, J. W. 1996. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall. Upper Saddle River. NJ