BILANGAN RAMSEY UNTUK GRAF BINTANG S_n DAN GRAF RODA W_m

ISNAINI RAMADHANI

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas Padang,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
evelynrebelz@yahoo.com

Abstrak. Diberikan graf G dan H , Bilangan Ramsey $R(G, H)$ adalah bilangan bulat terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap graf F dengan orde n akan memuat kondisi berikut : F memuat G atau komplemen F akan memuat H . Makalah ini membahas Bilangan Ramsey $R(S_n, W_m)$ untuk graf bintang dan graf roda. Diberikan bintang S_n dan roda W_m maka $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk m ganjil, $n \geq 3$ and $m \leq 2n - 1$. Sedangkan $R(S_n, W_m) = 3n - 4$ untuk n ganjil, $n \geq 5$ and $m = 2n - 4$.
Kata Kunci: *Bilangan Ramsey, Bintang, Roda*

1 Pendahuluan

Diberikan graf G dan H , Bilangan Ramsey $R(G, H)$ adalah bilangan bulat terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap graf F dengan orde n akan memuat kondisi berikut : F memuat G atau komplemen F akan memuat H . Batas bawah bilangan Ramsey $R(G, H)$ diberikan oleh Chvatal dan Harary, yaitu $R(G, H) \geq (c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1$, dimana $\chi(H)$ adalah bilangan kromatik graf H dan $c(G)$ melambangkan banyaknya titik pada komponen terbesar dalam graf G .

Pada tahun 2001, Surahmat dan Baskoro memperoleh bilangan Ramsey untuk pasangan graf bintang S_n dan graf roda W_m , yaitu $R(S_n, W_4) = 2n - 1$ untuk n ganjil, $n \geq 3$ dan $R(S_n, W_4) = 2n + 1$ untuk n genap. Mereka juga membuktikan $R(S_n, W_5) = 3n - 2$ untuk $n \geq 3$. Selain itu, mereka juga memperoleh $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk m ganjil, $m \geq 5$ dan $n \geq 2m - 4$. Hasil ini diperkuat oleh Chen dkk. (2004) yang membuktikan $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk m ganjil, $m \geq 5$ dan $n \geq m - 1 \geq 2$. Zhang dkk. menunjukkan $R(S_n, W_6) = 2n + 1$ untuk $n \geq 3$ dan $R(S_n, W_8) = 2n + 1$ untuk n ganjil, $5 \leq n \leq 10$ dan $R(S_n, W_8) = 2n + 2$ untuk n genap. Korolova menunjukkan bahwa untuk m ganjil, $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ jika $n = m$, $m + 1$ atau $m + 2$. Selain itu Hasmawati (2005) juga membuktikan $R(S_n, W_m) = m + n - 2$ untuk n ganjil, $m \geq 2n - 2$ dan $n \geq 4$.

Makalah ini merupakan kajian ulang dari rujukan [4]. Dalam makalah ini akan dikaji kembali tentang Bilangan Ramsey $R(S_n, W_m)$ untuk n dan m tertentu, yaitu

Teorema 1. *Diberikan bintang S_n dan roda W_m . Maka $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk m ganjil, $n \geq 3$ dan $m \leq 2n - 1$.*

Teorema 2. *Diberikan bintang S_n dan roda W_m . Maka $R(S_n, W_m) = 3n - 4$ untuk n ganjil dan $n \geq 5$, dan $m = 2n - 4$.*

Berikut beberapa notasi yang digunakan dalam makalah ini. Misalkan $H \subseteq G$. Subgraf H disebut suatu komponen dari G jika H merupakan subgraf terhubung maksimal. Notasi $c(G)$ melambangkan banyaknya titik pada komponen terbesar dalam graf G . Notasi $g(G)$ melambangkan panjang siklus terkecil yang termuat dalam G . Untuk suatu titik $v \in V(G)$, lingkungan $N(v)$ adalah himpunan dari titik yang menjadi tetangga v di G . Selain itu juga didefinisikan $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Derajat dari titik v dalam graf G adalah banyaknya titik pada $N_G(v)$, dinotasikan dengan $|N_G(v)|$ atau $d_G(v)$. Derajat minimum dari G adalah derajat terkecil dari titik-titik dalam G , dinotasikan dengan $\delta(G)$. Derajat maksimum dari G adalah derajat terbesar dari titik-titik dalam G , dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Graf dengan n titik dikatakan *pancyclic* jika memuat siklus dengan panjang l , $3 \leq l \leq n$. Graf dikatakan *weakly pancyclic* jika memuat siklus dengan panjang sebesar *girth* (panjang siklus terpendek) hingga ke *circumference* (panjang siklus terpanjang).

2 Jenis-jenis Graf

Berikut adalah beberapa jenis graf yang digunakan dalam makalah ini. Graf lengkap (*complete graph*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan dengan K_n . Setiap titik pada K_n berderajat $n - 1$. Graf siklus (*cycle*) adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n , $n \geq 3$. Graf roda (*wheel*) W_m adalah suatu graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik, dinamakan x_0 , di luar C_n yang bertetangga ke semua titik di C_n . Graf bintang (*star*) S_n adalah graf pohon berorde n yang memiliki satu titik berderajat $n - 1$ yang disebut pusat dan $n - 1$ titik berderajat satu.

3 Bilangan Ramsey Untuk Graf Bintang S_n Dan Graf Roda W_m

Berikut adalah lema yang digunakan untuk mendukung pembuktian teorema utama pada makalah ini.

Lema 1. (Bondy) *Misal G adalah graf dengan orde n . Jika $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, maka G adalah pansiklis atau $G = K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ untuk n genap.*

Selanjutnya akan ditentukan bilangan Ramsey $R(S_n, W_m)$ untuk pasangan bintang S_n dan roda W_m untuk m ganjil, $n \geq 3$ dan $m \leq 2n - 1$, serta untuk n ganjil, $n \geq 5$ dan $m = 2n - 4$. Karena $c(T_n) = n$ dan $\chi(W_m) = 3$ untuk m genap atau $\chi(W_m) = 4$ untuk m ganjil, maka menurut Teorema batas bawah Chvatal dan Harary diperoleh batas bawah untuk $R(T_n, W_m)$ yaitu :

$$R(T_n, W_m) \geq \begin{cases} 2n - 1, & m \text{ genap} \\ 3n - 2, & m \text{ ganjil} \end{cases} \quad (1)$$

Karena S_n dengan n titik adalah salah satu dari bentuk pohon T_n dengan n titik, maka pertaksamaan (1) dapat digunakan untuk memperoleh batas bawah $R(S_n, W_m)$, yaitu

$$R(S_n, W_m) \geq \begin{cases} 2n - 1, & m \text{ genap} \\ 3n - 2, & m \text{ ganjil} \end{cases} \quad (2)$$

Teorema 3. Diberikan bintang S_n dan roda W_m . Maka $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk m ganjil, $n \geq 3$ dan $m \leq 2n - 1$.

Bukti. Karena $3K_{n-1}$ tidak memuat S_n dan komplemen dari $3K_{n-1}$ tidak memuat W_m untuk m ganjil maka $R(S_n, W_m) \geq 3n - 2$ untuk m ganjil. Selanjutnya, untuk memperoleh nilai eksak $R(S_n, W_m)$, akan ditunjukkan bahwa $R(S_n, W_m) \leq 3n - 2$.

Misalkan F adalah sebarang graf berorde $3n - 2$ yang tidak memuat S_n . Akan ditunjukkan $\bar{F}$ memuat W_m . Misalkan x adalah sebarang titik di F . Karena $F \not\supseteq S_n$, maka $d_F(x) \leq n - 2$ untuk setiap $x \in F$. Misalkan $A = V(F) \setminus N[x]$ dan $T = F[A]$, seperti pada Gambar 1.

Gambar 1. Graf dengan orde $3n - 2$ yang tidak memuat S_n

Maka haruslah $|T| \geq (3n - 2) - (n - 1) = 2n - 1$. Karena $d_T(v) \leq n - 2$ untuk setiap $v \in T$ dan $|\bar{T}| = |T|$, maka

$$\begin{aligned} d_{\bar{T}}(v) &\geq |T| - (n - 1) = 2n - 1 - (n - 1), \\ &= n \\ &> n - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Karena $|\bar{T}| \geq 2n - 1 = 2(n - \frac{1}{2})$ maka $d_{\bar{T}}(v) \geq \frac{|\bar{T}|}{2}$. Karena $d_{\bar{T}}(v) \geq \frac{|\bar{T}|}{2}$ maka menurut Lema 1, $\bar{T}$ adalah graf pancyclic artinya $\bar{T}$ memuat siklus C_m , dengan $3 \leq m \leq 2n - 1 \leq |\bar{T}|$. Dengan x sebagai pusat, diperoleh graf roda W_m di $\bar{F}$. Sehingga $R(S_n, W_m) \leq 3n - 2$ untuk $3 \leq m \leq 2n - 1$. Jadi, $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk $3 \leq m \leq 2n - 1$.

Contoh 1. Untuk $n = 5$ dan $m = 9$ akan ditunjukkan $R(S_5, W_9) = 13$, dengan menunjukkan bahwa batas bawah dan batas atasnya sama. Karena $3K_4$ tidak memuat S_5 dan komplemen dari $3K_4$ tidak memuat W_9 untuk m ganjil maka $R(S_5, W_9) \geq 13$. Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa $R(S_5, W_9) \leq 13$. Ambil graf F dengan 13 titik dan F tidak memuat S_5 . Ilustrasi diberikan pada Gambar 2.

Karena $F \not\supseteq S_5$ maka $d_F(x) \leq 3 = 5 - 2$. Misalkan $A = V(F) - N[x]$ dan $T = F[A]$ maka diperoleh $|\bar{T}| \geq 2.5 - 1 = 9$. $\forall v \in T$, $d_T(v) \leq 3 = 5 - 2$ sehingga

$$\begin{aligned} d_{\bar{T}}(v) &\geq |T| - (n - 1) \\ &= 9 - 4, \\ &\geq \frac{|\bar{T}|}{2} \end{aligned}$$

Gambar 2. Graf F yang tidak memuat S_5

Menurut Lema 1, $\bar{T}$ memuat siklus C_9 , untuk $3 \leq m \leq 9 \leq |\bar{T}|$. Karena $\bar{T} \subseteq \bar{F}$ maka $W_9 \subseteq \bar{T} \subseteq \bar{F}$, sehingga $R(S_5, W_9) \leq 3.5 - 2 = 13$. Ilustrasi diberikan pada gambar 3.

Gambar 3. Ilustrasi $\bar{F}$ yang memuat W_9

Teorema 4. Diberikan bintang S_n dan roda W_m . Maka $R(S_n, W_m) = 3n - 4$ untuk n ganjil dan $n \geq 5$, dan $m = 2n - 4$.

Bukti. Pertama-tama, akan ditunjukkan bahwa batas bawah untuk $R(S_n, W_m) \geq 3n - 4$. Karena $K_{n-1} \cup K_{n-2, n-2}$ tidak memuat S_n dan komplementnya tidak memuat W_m , untuk $m = 2n - 4$ maka $R(S_n, W_m) \geq 3n - 4$.

Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa $R(S_n, W_m) \leq 3n - 4$. Misalkan F adalah sebarang graf berorde $3n - 4$ dan asumsikan F tidak memuat S_n . Akan ditunjukkan $\bar{F}$ memuat W_m . Karena F tidak memuat S_n , maka $d_F(v) \leq n - 2$ untuk setiap $v \in F$. Karena n ganjil maka $|F| = 3n - 4$ juga ganjil. Dengan demikian, tidak semua titik di F berderajat $n - 2$ (ganjil).

Misalkan terdapat $x_0 \in F$ dengan $d_F(x_0) \leq n - 3$. Tulis $A = V(F) \setminus N[x_0]$, dan $T = F[A]$, seperti pada Gambar 4.

Maka haruslah $|T| \geq (3n - 4) - (n - 2) = 2n - 2$. Karena $d_T(v) \leq n - 2$ untuk setiap $v \in T$ dan $|\bar{T}| = |T|$, maka

$$\begin{aligned} d_{\bar{T}}(v) &\geq |T| - (n - 1) \\ &= 2n - 2 - (n - 1), \\ &= n - 1 > n - 2 \end{aligned}$$

Gambar 4. Graf dengan orde $3n - 4$ yang tidak memuat S_n

Karena $|\bar{T}| \geq 2n - 2 \geq 2(n - 1) \geq 2(n - 2)$ maka $d_{\bar{T}}(v) \geq \frac{|\bar{T}|}{2}$.

Menurut Lema 1 maka diperoleh $\bar{T}$ memuat siklus C_{2n-4} . Dengan demikian, $\bar{F}$ memuat suatu roda W_{2n-4} dengan pusat x_0 . Jadi, $R(S_n, W_m) \leq 3n - 4$ untuk $m = 2n - 4$.

Contoh 2. Untuk $n = 5$ maka $m = 6$ akan ditunjukkan $R(S_5, W_6) = 11$, dengan menunjukkan batas bawah dan batas atasnya sama. Karena $K_4 \cup K_{3,3}$ tidak memuat S_5 dan komplementnya tidak memuat W_6 , untuk $m = 6$ maka $R(S_5, W_6) \geq 11$. Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa $R(S_5, W_6) \leq 11$ dan F tidak memuat S_5 . Ilustrasi diberikan pada Gambar 5.

Gambar 5. Graf F yang tidak memuat S_5

Karena n ganjil maka $|F| = 3n - 4$ juga ganjil. Dengan demikian, tidak semua titik di F berderajat $n - 2$ (ganjil) sehingga $d_F(x_0) \leq n - 3 = 5 - 3 = 2$. Misalkan $A = V(F) - N[x]$ dan $T = F[A]$ maka diperoleh $|\bar{T}| \geq 2 \cdot n - 2 = 2(5) - 2 = 8$. $\forall v \in T$, $d_T(v) \leq 3$ maka $d_{\bar{T}}(v) \geq |T| - (n - 1) = 8 - 4 = 4$. Sehingga $d_{\bar{T}}(v) \geq \frac{|\bar{T}|}{2}$.

Menurut Lema 1, $\bar{T}$ memuat siklus C_6 . Dengan demikian, $\bar{F}$ memuat suatu W_6 dengan pusat x_0 . Jadi $R(S_5, W_6) \leq 3(5) - 2 = 11$. Ilustrasi diberikan pada Gambar 6.

4 Kesimpulan

Diberikan graf bintang S_n dengan n titik dan graf roda W_m dengan $m + 1$ titik maka bilangan Ramsey untuk pasangan bintang dan roda adalah

Gambar 6. Ilustrasi $\bar{F}$ yang memuat W_6

1. $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ untuk m ganjil, $n \geq 3$ dan $m \leq 2n - 1$.
2. $R(S_n, W_m) = 3n - 4$ untuk n ganjil, $n \geq 5$ dan $m = 2n - 4$.

5 Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Zulakmal, M.Si, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Dr. Syafrizal Sy, Bapak Narwen, M.Si, yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

6 Daftar Pustaka

1. Chartrand, G. and Ping Zhang. 2005. **Introduction to Graph Theory**. McGraw-Hill Press, Singapore
2. Chvatal, V. and F. Harary. 1972. Generalized Ramsey Theory for Graph, III. Small off-Diagonal Numbers *Pacific. J.Math*, **41** : 335 – 345
3. Hasmawati. 2007. **Bilangan Ramsey untuk graf Bintang**. ITB Bandung. Disertasi-S3. Tidak diterbitkan.
4. Hasmawati, E.T Baskoro, dan Hilda Assiyatun. 2005. Star-Wheel Ramsey Numbers. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*. **55** : 123 – 128
5. Radziszowski, S. P. Small Ramsey Numbers. *The Electronic Journal of Combinatorics*, August (2011) DS1
6. Surahmat and E.T. Baskoro. 2001. On The Ramsey Number of a Path or a Star versus W_4 or W_5 , *Proceedings of the 12-th Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms*, Bandung, Indonesia, July 14-17 (2001): 165 - 170
7. Surahmat. 2003. **Bilangan Ramsey untuk graf Roda**. ITB Bandung. Disertasi-S3. Tidak diterbitkan