

PEMODELAN KELAHIRAN MURNI DAN KEMATIAN MURNI DENGAN DUA JENIS KELAMIN DENGAN PROSES STOKASTIK

FEBI OKTORA HERNANDA

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
febihernanda@gmail.com*

Abstrak. Proses stokastik adalah kumpulan variabel acak yang didefinisikan pada ruang probabilitas. Salah satu model dari proses stokastik adalah proses kelahiran dan kematian dengan jenis kelamin yang berbeda. Proses Yule dan persamaan diferensial dapat digunakan untuk membentuk model stokastik untuk kelahiran murni dan kematian murni dengan dua jenis kelamin. Model ini dapat menggambarkan fenomena untuk dinamika populasi dengan jenis kelamin berbeda dalam berbagai kasus.

Kata Kunci: Proses Stokastik, Kelahiran Murni, Kematian Murni

1. Pendahuluan

Proses stokastik sangat dominan dalam merumuskan fenomena alam karena lebih realistis dalam menangkap indikasi alam dan relatif dengan melibatkan unsur ruang dan waktu. Proses stokastik menurut Oxford *dictionary* adalah suatu barisan yang memenuhi hukum-hukum peluang. Ini menyatakan bahwa setiap nilai yang berubah terhadap waktu dengan cara yang tidak tertentu dikatakan mengikuti proses stokastik.

Proses stokastik menunjukkan barisan waktu suatu kejadian. Salah satu proses yang spesifik dari suatu proses stokastik adalah proses pencacahan. Sedangkan proses pencacahan yang berupa suatu model dari fenomena alam dinamakan proses Poisson. Salah satu contoh peristiwa dari proses Poisson adalah proses kelahiran-kematian. Proses kelahiran-kematian yang banyak dibahas dalam literatur adalah proses *kelahiran murni* dan *kematian murni*. Proses kelahiran-kematian dikatakan proses kelahiran murni apabila tidak ada proses kematian yang terjadi. Proses kelahiran-kematian dikatakan proses kematian murni apabila tidak ada proses kelahiran yang terjadi. Dalam artikel ini akan dicari suatu rumusan pemodelan untuk proses kelahiran murni dan kematian murni dengan dua jenis kelamin dengan proses stokastik.

2. Proses Stokastik

Proses stokastik didefinisikan sebagai suatu kumpulan variabel acak $\{N(t)\}$ dengan $t \in T$ dan $T \subset R$. Bila $T = \{1, 2, \dots\}$ maka $N(t)$ adalah proses stokastik dalam

waktu diskrit atau $\{N(t)\}$ adalah barisan bilangan acak. Bila $T = [0, \infty)$ maka $\{N(t)\}$ adalah proses stokastik dalam waktu kontinu, dimana himpunan T disebut ruang parameter, himpunan semua nilai yang mungkin dari $N(t)$ disebut ruang keadaan dari proses stokastik $N(t)$ [4].

Suatu eksperimen yang menghasilkan jumlah sukses yang terjadi pada interval waktu ataupun daerah yang spesifik dikenal sebagai eksperimen Poisson. Variabel acak diskrit X dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter λ jika fungsi peluangnya sebagai berikut

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}. \quad (2.1)$$

Proses Poisson adalah sebuah proses pencacahan yang mempunyai batasan tertentu, yaitu diantaranya mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata λt . Dalam [2] diberikan beberapa asumsi untuk Proses Poisson sebagai berikut.

- (1) Peluang terjadinya satu kedatangan antara waktu t dan $t + \Delta t$ adalah $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, dengan λ adalah suatu laju kedatangan.
- (2) Peluang terjadinya lebih dari satu kedatangan antara waktu t dan $t + \Delta t$ adalah $o(\Delta t)$ atau bisa dikatakan diabaikan.
- (3) Jumlah kedatangan pada interval yang berurutan adalah tetap dan saling bebas.

Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut sebagai proses pencacahan jika $N(t)$ merupakan jumlah total kejadian yang telah terjadi sampai dengan waktu t . Dalam [4] diberikan beberapa sifat dalam proses perhitungan $N(t)$ sebagai berikut.

- (1) $N(t) \geq 0$.
- (2) $N(t)$ adalah bilangan bulat.
- (3) Jika $\Delta t \leq t$, maka $N(\Delta t) \leq N(t)$.
- (4) Untuk $\Delta t < t$, $N(t) - N(\Delta t)$ sama dengan jumlah peristiwa yang telah terjadi dalam interval $(\Delta t, t]$.

Proses pencacahan $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan proses Poisson dengan rata-rata $\lambda > 0$, jika mempunyai sifat stasioner, yakni kejadian yang terjadi pada interval waktu yang dependen [4]. Maka

- (1) $N(0) = 0$.
- (2) $P\{N(\Delta t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$.
- (3) $P\{N(\Delta t) \geq 2\} = o(\Delta t)$.

3. Model Kelahiran Murni Berdasarkan Jenis Kelamin

Misalkan λ_i merupakan rata-rata kelahiran ke- i dan μ_i merupakan rata-rata kematian ke- i . Proses kelahiran-kematian dikatakan proses kelahiran murni jika $\mu_i = 0$ untuk setiap i . $N(t)$ merupakan ukuran populasi pada waktu t . $N(t)$ adalah proses kelahiran murni dengan $\lambda_i = i\lambda, i \geq 0$ maka proses kelahiran murni ini disebut dengan proses Yule. λ_i merupakan suatu barisan bilangan positif dan i menyatakan banyaknya individu lahir serta mengikuti proses Poisson.

Dalam [3] dikatakan bahwa proses kelahiran murni memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.

- (1) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1 | N(t) = i\} = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t).$
- (2) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 0 | N(t) = i\} = 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t).$
- (3) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) < 0 | N(t) = i\} = 0.$
- (4) $N(0) = 0.$

Dari sifat-sifat diatas maka didapatkan persamaan diferensial

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\lambda_i P_i(t) + \lambda_{i-1} P_{i-1}(t); i \geq 1. \quad (3.1)$$

Karena proses kelahiran murni mengikuti proses Yule dimana $\lambda_i = i\lambda$, maka persamaan diatas menjadi

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -i\lambda P_i(t) + (i-1)\lambda P_{i-1}(t); i \geq 1. \quad (3.2)$$

dengan kondisi awal $P_1(0) = 0$; $P_i(0) = 0$ untuk $i > 1$.

Persamaan diferensial diatas diselesaikan dengan menggunakan penyelesaian persamaan diferensial linier orde satu , maka dari persamaan diatas akan didapatkan solusi umum

$$P_i(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{i-1}; i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

Persamaan diatas merupakan model kelahiran murni dengan t = waktu, λ =laju kelahiran selama t dan i menyatakan peluang ke- i .

Misalkan i merupakan banyaknya kelahiran individu untuk semua jenis kelamin yang lahir selama waktu t . Maka i dapat dibedakan berdasarkan jenis kelamin yaitu dengan m sebagai jumlah individu wanita yang lahir dan n sebagai jumlah individu pria yang lahir atau dapat dinyatakan $i = m + n$.

Misalkan $N_1(\Delta t)$ merupakan proses Poisson dengan parameter $(\lambda_1)_{m+n}$ yang menyatakan banyaknya individu wanita yang lahir pada saat Δt dan $N_2(\Delta t)$ merupakan proses Poisson dengan parameter $(\lambda_2)_{m+n}$ yang menyatakan banyaknya individu pria yang lahir selama Δt dan keduanya saling bebas. Apabila $N(\Delta t)$ dinotasikan sebagai banyaknya individu wanita maupun pria yang lahir selama Δt , maka

$$N(\Delta t) = N_1(\Delta t) + N_2(\Delta t), \quad (3.4)$$

dan selanjutnya $N(\Delta t)$ merupakan proses Poisson dengan parameter

$$\lambda_i = (\lambda_1)_{m+n} + (\lambda_2)_{m+n}. \quad (3.5)$$

Kelahiran yang terjadi dalam selang waktu $(t, t + \Delta t)$ saling lepas dengan kelahiran yang terjadi dalam selang waktu $(0, t]$, dimana banyaknya kelahiran yang terjadi dalam selang waktu $(0, t]$ disimbolkan dengan $m + n$. Maka probabilitas banyaknya individu wanita maupun pria yang lahir pada waktu t , dapat disimbolkan dengan $P_{m+n}(t)$ dan $i = m + n$.

Sehingga diperoleh sifat-sifat sebagai berikut

- (1) $P\{N(t) = m + n\} = P_{m+n}(t).$
- (2) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 0 | N(t) = m + n\} = 1 - ((\lambda_1)_{m+n} + (\lambda_2)_{m+n})\Delta t + o(\Delta t).$
- (3) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1 | N(t) = m + n\} = ((\lambda_1)_{m+n}) + o(\Delta t).$
- (4) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1 | N(t) = m + n\} = ((\lambda_2)_{m+n}) + o(\Delta t)$, untuk $a \geq 2$ pada saat Δt , maka diperoleh

$$(5) P\{N(t + \Delta t) - N(t) = a | N(t) = m + n\} = o(\Delta t).$$

Karena proses kelahiran murni mengikuti proses Yule maka proses kelahiran berdasarkan jenis kelamin juga mengikuti proses Yule untuk wanita maupun pria, sehingga $(\lambda_1)_{m+n} = m + n(\lambda_1)$ dan $(\lambda_2)_{m+n} = m + n(\lambda_2)$ dan $i = m + n$. Maka diperoleh persamaan

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -i(\lambda_1 + \lambda_2)P_i(t) + (i-1)(\lambda_1 + \lambda_2)P_{i-1}(t). \quad (3.6)$$

Untuk $i = 1, 2, \dots$ dan dengan kondisi awal $P_1(0) = 1$, $P_i(t) = 0$ untuk $i = 2, 3, \dots$. Persamaan diferensial diatas diselesaikan dengan menggunakan penyelesaian persamaan diferensial linier orde satu, maka dari persamaan diatas akan didapatkan solusi umum

$$P_i(t) = e^{((\lambda_1)+(\lambda_2))t}(1 - e^{-((\lambda_1+\lambda_2))t})^{i-1}, \quad (3.7)$$

dengan

$P_i(t)$: menyatakan peluang ke- i banyaknya individu wanita maupun individu pria yang lahir selama t

λ_1 : menyatakan rata-rata kelahiran individu wanita selama t

λ_2 : menyatakan rata-rata kelahiran individu pria selama t

t : menyatakan waktu.

Selanjutnya salah satu kasus yang menggambarkan proses kematian murni yaitu pengeluaran akte kelahiran pada kantor pencatatan sipil. Diasumsikan bahwa pada kantor pencatatan sipil pengeluaran akte kelahiran mengikuti proses kelahiran murni dalam suatu keadaan tersebar sepanjang waktu mengikuti distribusi Poisson. Diketahui jumlah kelahiran bayi perempuan tahun 2012 di Kota Padang sebanyak 8.746 dan jumlah kelahiran bayi laki-laki sebanyak 8.059.

Dengan demikian dapat ditentukan peluang tidak ada akte kelahiran bayi wanita maupun bayi laki-laki yang dikeluarkan dalam 1 hari. Asumsikan bahwa λ_1 adalah laju pengeluaran akte kelahiran bayi perempuan dan λ_2 adalah laju pengeluaran akte kelahiran bayi laki-laki. Misalkan $N(t)$ adalah jumlah semua akte kelahiran yang dikeluarkan pada waktu t . Banyaknya kelahiran bayi perempuan dalam sehari dapat dihitung sebagai berikut.

$$\lambda_1 = \frac{8746}{12 \times 30} \approx 24,23 \text{ kelahiran/hari.}$$

Banyaknya kelahiran bayi laki-laki dalam sehari sebagai berikut

$$\lambda_2 = \frac{8059}{12 \times 30} \approx 22,38 \text{ kelahiran/hari.}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.7) maka peluang tidak adanya akte kelahiran bayi perempuan ataupun bayi laki-laki yang dikeluarkan dalam satu hari adalah

$$P_0(1) = e^{-(24,29+22,38) \cdot 1} (1 - e^{-(24,29+22,38) \cdot 1})^{1-1} \quad (3.8)$$

$$= e^{46,47} \approx 0. \quad (3.9)$$

Jadi peluang tidak adanya akte kelahiran bayi perempuan maupun bayi yang laki-laki yang dikeluarkan dalam 1 hari adalah 0.

4. Model Kematian Murni Berdasarkan Jenis Kelamin

Misalkan λ_j merupakan rata-rata kematian ke- j dan μ_j merupakan rata-rata kematian ke- j . Proses kelahiran-kematian dikatakan proses kematian murni jika $\lambda_j = 0$ yakni tidak terjadi kelahiran. $N(t)$ merupakan ukuran populasi pada waktu t , adalah proses kematian murni dengan $\mu_j = j\mu, j \geq 0$. Ini proses kematian murni yang disebut proses Yule. μ_j merupakan suatu barisan bilangan positif dan j menyatakan banyaknya individu yang mati.

Dalam [3] diberikan beberapa sifat dari proses kematian murni sebagai berikut.

- (1) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = j - 1\} = \mu_j \Delta t + o(\Delta t), j = 1, 2, \dots, N.$
- (2) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = j\} = 1 - \mu_j \Delta t + o(\Delta t), j = 1, 2, \dots, N.$
- (3) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) > j\} = 0, j = 0, 1, \dots, N.$
- (4) $N(0) = N.$

Dari sifat-sifat diatas maka diperoleh persamaan diferensial dan karena μ_j suatu barisan bilangan positif maka

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -\mu_j P_j(t) + \mu_{j+1} P_{j+1}(t); 0 \leq j < N. \quad (4.1)$$

Karena proses kematian murni mengikuti proses Yule maka $\mu_j = j\mu$, sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{dP_j(t)}{dt} + j\mu P_j(t) = (j+1)P_{j+1}(t). \quad (4.2)$$

Asumsikan proses kematian murni dimulai pada saat $j = N$, sehingga peluang terdapat N kematian dalam populasi saat $t = 0$ dinotasikan $P_N(0)$ adalah 1. Jika $0 \leq j < N$ maka $P_N(0) = 0$. Dengan menggunakan penyelesaian persamaan diferensial linier orde satu, maka akan didapatkan solusi umum untuk persamaan (4.2) :

$$P_j(t) = \binom{N}{j} (e^{-\mu t})^j (1 - e^{-\mu t})^{N-j}; j = 0, \dots, N. \quad (4.3)$$

Pemodelan proses kematian murni berdasarkan jenis kelamin hampir sama dengan proses kelahiran murni berdasarkan jenis kelamin. Maka j dapat dibedakan berdasarkan jenis kelamin yaitu dengan r sebagai jumlah individu wanita yang mati dan s sebagai jumlah individu pria yang mati.

Misalkan $N_1(\Delta t)$ merupakan proses Poisson dengan parameter $(\mu_1)_{r+s}$ yang menyatakan banyaknya kematian individu wanita pada saat Δt dan $N_2(\Delta t)$ merupakan proses Poisson dengan parameter $(\mu_2)_{r+s}$ yang menyatakan banyaknya kematian individu pria saat Δt dan keduanya saling bebas.

Apabila $N(\Delta t)$ dinotasikan banyaknya kematian individu wanita maupun pria pada selang waktu Δt maka

$$N(\Delta t) = N_1(\Delta t) + N_2(\Delta t), \quad (4.4)$$

dan selanjutnya $N(\Delta t)$ merupakan proses Poisson dengan parameter

$$\mu_j = (\mu_1)_{r+s} + (\mu_2)_{r+s}. \quad (4.5)$$

Kematian yang terjadi dalam selang waktu $(t, t + \Delta t)$ saling lepas dengan kematian yang terjadi dalam selang waktu $(0, t]$ dimana banyaknya kematian yang terjadi

dalam selang waktu $(0, t]$ disimbolkan dengan $r + s$. Maka probabilitas banyaknya individu wanita maupun pria yang mati pada saat t , dapat disimbolkan dengan $P_{r+s}(t)$ dan $j = r + s$.

Sehingga didapat sifat-sifat sebagai berikut

- (1) $P\{N(t) = r + s\} = P_{r+s}(t)$.
- (2) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = j | N(t) = r + s\} = 1 - ((\mu_1)_{r+s} + (\mu_2)_{r+s}\Delta t) + o(\Delta t)$.
- (3) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = j - 1 | N(t) = r + s\} = ((\mu_1)_{r+s}\Delta t) + o(\Delta t)$.
- (4) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = j - 1 | N(t) = r + s\} = ((\mu_2)_{r+s}\Delta t) + o(\Delta t)$, untuk $a \geq 2$ pada saat Δt , maka diperoleh
- (5) $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = a | N(t) = r + s\} = o(\Delta t)$.

Karena proses kematian murni mengikuti proses Yule maka proses kematian murni berdasarkan jenis kelamin juga mengikuti proses Yule sehingga $(\mu_1)_{r+s} = (r + s)(\mu_1)$ dan $(\mu_2)_{r+s} = (r + s)(\mu_2)$ dan $j = r + s$. Sehingga diperoleh persamaan diferensial

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -j(\mu_1 + \mu_2)P_j(t) + (j + 1)(\mu_1 + \mu_2)P_{j+1}(t). \quad (4.6)$$

Dengan asumsi yang sama dengan kematian murni maka dengan kondisi awal $P_N(0) = 1$ untuk $j = N$ dan $P_j(0) = 0$ untuk $0 \leq j < N$. Sehingga untuk kasus $j = N$ maka $P_{j+1}(t) = 0$ sehingga diperoleh persamaan diferensial

$$\frac{dP_N(t)}{dt} + N(\mu_1 + \mu_2)P_N(t) = 0. \quad (4.7)$$

Dengan menggunakan penyelesaian persamaan diferensial linier orde satu maka didapatkan solusi umum

$$P_j(t) = \binom{N}{j} (e^{-(\mu_1 + \mu_2)t})^j (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t})^{N-j}; j = 0, 1, \dots, N. \quad (4.8)$$

dengan

$P_j(t)$: menyatakan peluang ke- j banyaknya individu wanita atau pria yang mati selama t

μ_1 : menyatakan rata-rata kematian individu wanita selama t

μ_2 : menyatakan rata-rata kematian individu pria selama t

t : menyatakan waktu.

Selanjutnya salah satu kasus yang menggambarkan proses kematian murni yaitu persediaan imunisasi pada Dinas Kesehatan. Diasumsikan bahwa diawal setiap minggu badan Dinas Kesehatan Kota Padang memiliki 65 unit persediaan imunisasi Vitamin A untuk balita usia 6 – 11 bulan yang akan disalurkan ke seluruh puskesmas di Kota Padang. Penyaluran persediaan hanya terjadi selama 6 hari pertama (kantor tutup pada hari Minggu) dan mengikuti Proses Poisson. Misalkan ketika persediaan mencapai 15 unit, pesanan imunisasi baru akan dikirimkan pada awal minggu berikutnya. Diketahui banyaknya balita perempuan yang mendapatkan imunisasi vitamin A di Kota Padang sepanjang tahun 2012 adalah 4.246 balita. Semua imunisasi yang tersisa di akhir minggu akan dibuang. Dengan demikian dapat ditentukan probabilitas 15 unit imunisasi (titik pemesanan ulang) di hari t .

Asumsikan μ_1 adalah laju imunisasi untuk balita perempuan dan μ_2 adalah laju imunisasi untuk balita laki-laki. Banyaknya pemberian imunisasi vitamin A balita perempuan dalam satu hari yaitu

$$\mu_1 = \frac{4.461}{12 \times 30} \approx 12,39 \text{ unit/hari.}$$

Sementara banyaknya pemberian imunisasi vitamin A balita laki-laki dalam satu hari yaitu

$$\mu_2 = \frac{4.246}{12 \times 30} \approx 11,79 \text{ unit/hari.}$$

Dengan menggunakan persamaan (4.8) maka untuk probabilitas 15 unit imunisasi vitamin A (pemesanan ulang) di hari t dengan $j = 15$ dan $N = 65$, sehingga didapatkan

$$P_{15}(t) = \frac{65!}{15!(65-15)!} e^{-15(12,39+11,79)t} (1 - e^{-(12,39+11,79)t})^{65-15} \text{ untuk } t = 1, 2, \dots, 6.$$

Dengan memasukkan semua nilai t pada persamaan diatas maka akan didapatkan hasil bahwa tidak adanya pengajuan pemesanan ulang pada hari t .

5. Kesimpulan

Penelitian ini dilakukan untuk mendapatkan model kelahiran murni berdasarkan jenis kelamin dan model kematian murni berdasarkan jenis kelamin. Berdasarkan dari uraian pembahasan di atas maka diperoleh model kelahiran murni berdasarkan jenis kelamin adalah sebagai berikut

$$P_i(t) = e^{((\lambda_1)+(\lambda_2))t} (1 - e^{-((\lambda_1)+(\lambda_2))t})^{i-1},$$

dengan

$P_i(t)$: menyatakan peluang ke- i banyaknya individu wanita maupun individu pria yang lahir selama t

λ_1 : menyatakan rata-rata kelahiran individu wanita selama t

λ_2 : menyatakan rata-rata kelahiran individu pria selama t

t : menyatakan waktu.

Selanjutnya untuk model kematian murni berdasarkan jenis kelamin diperoleh model sebagai berikut.

$$P_j(t) = \binom{N}{j} (e^{-(\mu_1+\mu_2)t})^j (1 - e^{-(\mu_1+\mu_2)t})^{N-j}; j = 0, 1, \dots, N,$$

dengan

$P_j(t)$: menyatakan peluang ke- j banyaknya individu wanita atau pria yang mati selama t

μ_1 : menyatakan rata-rata kematian individu wanita selama t

μ_2 : menyatakan rata-rata kematian individu pria selama t

t : menyatakan waktu.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Dodi Devianto, Ibu Dr. Ferra Yanuar, Bapak Yudiantri Asdi, M.Sc, Ibu Riri Lestari, M.Si, dan Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan.

Daftar Pustaka

- [1] Bain, L. J. and Max. E. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistic Second Edition* . California: Duxuby Press.
- [2] Dimiyati, A. dan Tarliyah, T. 1992. *Operation Research Model-Model Pengambilan Keputusan*. Bandung: PT Sinar Bagus Algesindo.
- [3] Karlin, S. and Taylor, Howard M. 1990. *A First Course in Stochastic Processes. Second Edition*. San Frasisco: Academic Press Inc.
- [4] Ross, S. 1983 *Stochastic Processes*. USA: John and Wiley Sons Inc.
- [5] Varberg, D. and Purcell, E. J. 2006. *Calculus and Diferential Equation* . PT Elex Media Komputindo. Jakarta.
- [6] Winston, W. L. 1994. *Operation Research*. California: Duxbury Press.