

PORTOFOLIO *ENVELOPE* PADA ASET FINANSIAL

JATU VISITASARI, DODI DEVIANTO

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 jatuv@yahoo.com*

Abstrak. Salah satu permasalahan yang terjadi pada aset finansial adalah menentukan portofolio untuk mendapatkan return yang telah ditargetkan tetapi dengan resiko yang minimum. Himpunan dari portofolio-portofolio disebut sebagai envelope dari aset-aset. Dalam studi ini membahas solusi untuk mendapatkan portofolio envelope dan efficient frontier pada suatu aset finansial dengan menggunakan geometri invarian yaitu proyeksi ortogonal dalam ruang *Euclidean* khususnya proses Gram-Schmidt. Sehingga diperoleh hubungan mena-variance untuk portofolio envelope. Pada paper ini kita memberikan sebuah ilustrasi dengan empat aset finansial pada perusahaan Bank Negara Indonesia, XL Axiata, Agung Podomoro dan Astra Internasional yang mana data asetnya diunduh pada tanggal 12 April 2014 di www.yahooofinance.com.

Kata Kunci: Analisis portofolio, portofolio *envelope*, *envelope*, *efficient frontier*, *mean-variance relation*

1. Pendahuluan

Dalam melaksanakan investasi, analisis portofolio sering menghadapi masalah tentang penaksiran risiko yang dihadapi oleh investor. Pada dasarnya, investor sangat menyukai investasi dengan *return* tinggi tetapi tidak menyukai risiko. Untuk mengatasi permasalahan tersebut investor bisa menginvestasikan aset-aset yang ada dengan membuat suatu portofolio, dimana portofolio ini merupakan gabungan dari beberapa aset yang bertujuan mengurangi risiko dengan *return* yang tetap.

Portofolio *envelope* merupakan portofolio yang dipilih investor setelah portofolio ini diidentifikasi kondisi harga jual dan harga belinya di pasar finansial. *Efficient frontier* merupakan himpunan dari semua portofolio yang efisien. Untuk menentukan portofolio *envelope* dan *efficient frontier*, dalam skripsi ini digunakan proyeksi ortogonal pada proses *Gram-Schmidt*. Proses *Gram-Schmidt* ini merupakan proses dimana mengubah suatu vektor sebarang menjadi vektor ortogonal sehingga akan menghasilkan jarak terpendek dan tunggal.

Dalam kasus ini semua aset yang digunakan N buah aset, $A_1, A_2, \dots, A_N$ dan masing-masing aset memiliki *return* yang berbeda yang mana dinotasikan dengan r . Misalkan A_k aset ke- k yang memiliki r_k , sehingga dalam analisis portofolio,

$$\begin{aligned} E(R_k) &= \mu_k \\ \text{Var}(R_k) &= \sigma_k^2 \\ \text{Cov}(R_k, R_j) &= \sigma_{kj} \end{aligned}$$

Portofolio adalah kombinasi dari aset $A_1, A_2, \dots, A_N$ yang dinotasikan dengan x sehingga

$$x = \sum_{k=1}^N x_k r_k, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_N = 1.$$

Teorema 1.1. Untuk setiap portofolio

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix} \text{ dan } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix},$$

- (1) $E(X) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_N x_N = Mx$,
- (2) $Var(X) = x^T S x$,
- (3) $Cov(X, Y) = x^T S y$,

dimana S adalah matriks kovarian

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \text{ dan } M = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_N].$$

2. Envelope dan Efficient Frontier

Definisi 2.1. [3] Himpunan dari semua portofolio efisien disebut dengan *efficient frontier* dari aset $A_1, A_2, \dots, A_N$ dan dinotasikan $EF(A_1, A_2, \dots, A_N)$.

Definisi 2.2. [3] Suatu portofolio disebut sebagai portofolio envelope jika mempunyai variansi yang lebih kecil diantara semua portofolio dengan pengembalian yang diharapkan sama.

Definisi 2.3. [3] Himpunan dari semua portofolio envelope disebut dengan proporsi envelope dari aset $A_1, A_2, \dots, A_N$ dan dinotasikan $Env(A_1, A_2, \dots, A_N)$.

Suatu vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix}$ adalah suatu portofolio *envelope* jika x merupakan

solusi dari

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = 1, \\ E(X) = \mu. \tag{2.1}$$

Untuk menentukan portofolio *envelope* dengan menggunakan proses Gram-Schmidt, maka solusi dari (2.1), misalkan q , akan diproyeksikan ke bidang W secara ortogonal dimana diperoleh proyeksi q terhadap bidang W sebagai berikut.

$$proj_W x = \frac{(x, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 + \dots + \frac{(x, v_N)}{(v_N, v_N)} v_N. \tag{2.2}$$

Teorema 2.4. *Andaikan $Q = \{q + w | w \in W\}$ adalah subruang affine dari L , dimana L adalah ruang linier. Maka terdapat suatu vektor di Q dengan panjang yang paling pendek dan tunggal, yaitu*

$$x_{min} = q - proj_W q. \quad (2.3)$$

Berdasarkan Teorema 1.1, karena $E(X) = Mx$ maka diperoleh matriks

$$\begin{aligned} Ux &= 1, \\ Mx &= \mu, \end{aligned} \quad (2.4)$$

dengan $U = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$, $M = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_N]$ dan U, M saling bebas.

Dari (2.4) diperoleh persamaan sistem homogen sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Ux &= 0, \\ Mx &= 0. \end{aligned}$$

Teorema 2.5. *Terdapat suatu portofolio envelope yang tunggal dengan $E(X) = \mu$ untuk setiap μ suatu bilangan riil. Portofolio envelope tunggal dapat dituliskan sebagai berikut.*

$$x_\mu = q - proj_W q. \quad (2.5)$$

dimana q merupakan solusi dari (2.4).

Teorema 2.6. *Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_{N-2}$ sistem ortogonal dari solusi persamaan (2.4), maka*

- (1) $(y, v_k) = Cov(Y, V_k)$ untuk setiap $y \in H$ dimana $k = 1, 2, \dots, N - 2$.
- (2) x_μ adalah portofolio envelope dengan $E(X) = \mu$;

$$x_\mu = q - \sum_{k=1}^{N-2} \frac{(q, v_k)}{(v_k, v_k)} v_k \quad (2.6)$$

dimana q solusi dari (2.4).

- (3) Aset-aset envelope yang diberikan merupakan himpunan $\{x_\mu = q - proj_W q | \mu \in \mathbb{R}\}$.

Dalam analisis portofolio, jika *return* yang diharapkan tinggi maka risiko yang akan diterima oleh investor juga tinggi.

Teorema 2.7. *Envelope digambarkan dalam (σ, μ) -plane pada bagian kanan hiperbola, dimana:*

$$\frac{\sigma^2}{A^2} - \frac{(\mu - \mu_0)^2}{B^2} = 1, \quad (2.7)$$

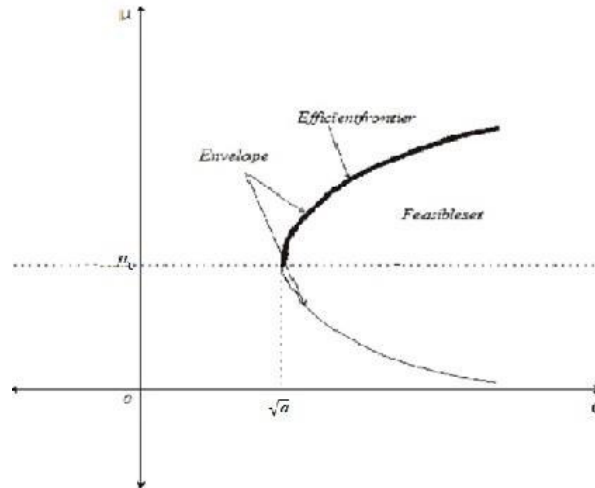
untuk semua $\sigma > 0$, $A > 0$, $B > 0$, dan μ_0 .

Portofolio dengan risiko terendah berada pada titik μ_0 dengan varian A (dapat dilihat pada Gambar 1). Sedangkan *efficient frontier* dipresentasikan pada kurva

hiperbola dengan pusat (σ, μ_0) :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{A} - \frac{(\mu - \mu_0)^2}{B} &= 1, \\ \sigma &> 0, \\ \mu &\geq \mu_0. \end{aligned}$$

Bukti. Definisikan x_μ sebagai portofolio *envelope* dengan $E(X_\mu) = \mu$ dan $Var(X_\mu) = \sigma^2$. Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, maka diperoleh fungsi linier q dengan parameter μ . Dari Teorema 2.6, X_μ juga fungsi linier dari μ : $x_\mu = c + b\mu$ dimana c dan b saling bebas dan $b \neq 0$.



Gambar 1. *Efficient frontier*

Berdasarkan Teorema 1.1 diperoleh

$$\sigma^2 = Var(X_\mu) = x_\mu^T S x_\mu = c^T S c + c^T S b \mu + b^T \mu^T S c + b^T \mu^T S b \mu. \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) merupakan hubungan antara σ dan μ dimana diberikan dengan persamaan berderajat dua sebagai berikut.

$$\mu^2 b^T S b + \mu(c^T S b + b^T S c) - \sigma^2 + c^T S c = 0. \quad (2.9)$$

sehingga persamaan (2.9) dapat dirubah menjadi persamaan umum berikut.

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_{13}u + 2a_{23}v + a_{33} = 0, \quad (2.10)$$

dan diperoleh $a_{11} = b^T S b$, $a_{22} = -1$, $a_{33} = c^T S c$, $a_{13} = \frac{1}{2}(c^T S b + b^T S c)$, $a_{12} = a_{23} = 0$.

Bandingkan dua invarian I_2 dan I_3 .

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -b^T S b.$$

$I_2 < 0$ karena S definit positif.

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} [(c^T S b + b^T S c)^2 - (b^T S b)(c^T S c)]$$

Karena S definit positif, maka untuk setiap bilangan riil t berlaku:

$$(c + bc)^T S (c + bt) > 0.$$

Karenanya untuk setiap t berlaku :

$$t^2 b^T S b + t(c^T S b + b^T S c) + c^T S c > 0.$$

Sehingga diskriminan dari I_3 bernilai negatif:

$$(c^T S b + b^T S c)^2 - 4(b^T S b)(c^T S c) < 0.$$

Hal ini memperlihatkan bahwa $I_3 < 0$ dan $I_2 < 0$. Persamaan (2.9) dapat ditransformasikan ke bentuk kanonik dengan melengkapi kuadrat dari μ sehingga menghasilkan bentuk pada Persamaan (2.7). Dari Persamaan (2.7) dapat dilihat bahwa titik kanan dari hiperbola mempunyai koordinat $(\mu_0, \sqrt{A})$ bersesuaian dengan portofolio yang memiliki risiko terendah. Berdasarkan Gambar 1, setiap nilai yang tepat dari σ (kecuali nilai titik) bersesuaian dengan dua titik pada *envelope* dan dua titik dari μ . Titik dengan μ yang lebih tinggi terletak pada *efficient frontier*. $\square$

3. Studi Kasus

Misalkan kita ambil empat perusahaan, yaitu Agung Podomoro, XL Axiata, Bank Negara Indonesia dan Astra Internasional, masing-masing memiliki aset dengan *return* sebesar 3%, 6%, 3%, dan 88%, serta matriks kovariannya

$$\begin{pmatrix} 29,747 & 3,735 & 25,128 & 270,1 \\ 3,735 & 61,040 & 25,870 & -447,4 \\ 25,128 & 25,870 & 118,676 & 75,8 \\ 270,059 & -447,431 & 75,840 & 25269,3 \end{pmatrix}.$$

Diketahui $N = 4$ dan $M = [3 \ 6 \ 3 \ 88]$ berdasarkan Persamaan (2.4) diperoleh SPL :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 88x_4 &= \mu, \end{aligned} \tag{3.1}$$

sehingga diperoleh salah satu solusinya

$$q = \begin{bmatrix} 0,33\mu - 1 \\ -0,33\mu + 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Persamaan (2.4) diperoleh sistem persamaan homogen:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 88x_4 &= 0,\end{aligned}\tag{3.2}$$

dan diperoleh salah satu solusi *non-trivial*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dan solusi *non-trivial* lainnya

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

dimana v_2 ortogonal terhadap v_1 .

Sehingga berdasarkan Teorema 1.1 diperoleh

$$Cov(V_1, V_2) = 0 = v_1^T S v_2 = 4,61858x_1 - 22,1344x_2 - 93,5474x_3 + 194,219x_4.$$

Selanjutnya Persamaan (3.2) menjadi :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 88x_4 &= 0, \\4,61858x_1 - 22,1344x_2 - 93,5474x_3 + 194,219x_4 &= 0,\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,961 \\ -1 \\ -0,1 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Persamaan (2.3) dapat ditentukan portofolio *envelope*:

$$x_\mu = q - \frac{(q, v_1)}{(v_1, v_2)} v_1 - \frac{(q, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2.$$

Perhatikan persamaan berikut:

$$\begin{aligned}(q, v_1) &= Cov(Q, V_1) = q^T S v_1 = -228,188\mu + 602,423, \\(q, v_2) &= Cov(Q, V_2) = q^T S v_2 = -70,839\mu + 364,001, \\(v_1, v_1) &= Cov(V_1, V_1) = v_1^T S v_1 = 98,1660, \\(v_2, v_2) &= Cov(V_2, V_2) = v_2^T S v_2 = 981,0688.\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
 x_\mu &= q - \frac{(q, v_1)}{(v_1, v_2)} v_1 - \frac{(q, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 \} \\
 &= \begin{bmatrix} -2,09\mu + 6,51 \\ -0,54\mu + 3,1 \\ 2,39\mu - 6,51 \\ 0,007\mu - 0,037 \end{bmatrix} \\
 Env(A_1, A_2, A_3, A_4) &= \left\{ \begin{bmatrix} -2,09\mu + 6,51 \\ -0,54\mu + 3,1 \\ 2,39\mu - 6,51 \\ 0,007\mu - 0,037 \end{bmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}
 \end{aligned}$$

Varian dari x_μ adalah

$$\sigma^2 = x_\mu^T S x_\mu = 515,72\mu^2 - 2755,47\mu + 3897,19 = \mu^2 - 5,34 + 7,56.$$

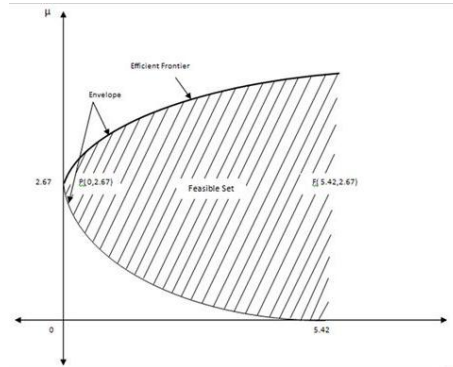
Envelope bisa dipresentasikan dengan kurva *mean-variance* :

$$\sigma^2 = 515,72\mu^2 - 2755,47\mu + 3897,19 = \mu^2 - 5,34 + 7,56. \quad (3.3)$$

Persamaan (3.3) dapat dirubah menjadi persamaan hiperbola dengan pusat(0;2,67) dan ($\sigma > 0$) :

$$\frac{\sigma^2}{14,6889} - \frac{(\mu - 2,67)^2}{14,6889} = 1. \quad (3.4)$$

Dari Gambar 2, daerah *feasible* adalah daerah bagian kanan dari kurva, yaitu:



Gambar 2. Feasible solution

$$\sigma^2 \geq \sqrt{(\mu - 2,67)^2 + 14,6889}.$$

Portofolio dengan risiko terendah pada Gambar 2 terletak pada titik (4,67;2,67) sehingga

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0,93 \\ 1,66 \\ -0,13 \\ -0,02 \end{bmatrix}.$$

Efficient frontier pada Gambar 2 terletak pada $\sigma > 0$ dan $\mu \geq 2,67$, sehingga :

$$EF(A_1, A_2, A_3, A_4) = \left\{ \begin{array}{l} -2,09\mu + 6,51 \\ -0,54\mu + 3,1 \\ 2,39\mu - 6,51 \\ 0,007\mu - 0,037 \end{array} \right| \mu \geq 2,67 \}.$$

4. Kesimpulan

Masalah yang terjadi dalam matematika keuangan dapat diselesaikan dengan menggunakan metode kalkulus dan metode probabilitas. Akan tetapi permasalahan ini juga dapat diselesaikan dengan menggunakan teori aljabar. Masalah yang sering terjadi adalah panaksiran investor dalam menginvestasikan asetnya yang mana investor menginginkan *return* yang tinggi tetapi risiko yang kecil. Pada kenyataannya, semakin tinggi *return* yang diharapkan maka semakin juga risiko yang terima. Untuk itu perlu dilakukan membentuk portofolio *envelope*. Dari portofolio-portofolio *envelope* yang terbentuk, investor dapat memilih satu portofolio *envelope* atau dinamakan *efficient frontier*. Dengan pembentukan portofolio *envelope*, investor bisa melakukan investasi dengan *return* yang diharapkan tinggi tapi dengan risiko yang kecil.

Daftar Pustaka

- [1] Anton, H. 1987. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi ke-5. Jakarta: Erlangga.
- [2] Benninga, S. and Czaczkes, B. 2000. *Financial Modelling*. 2nd ed., MIT Press, Cambridge.
- [3] Kachapova, Farida and Kachapov, Ilias. 2012. Finding the Envelope and Efficient Frontier of Financial Assets. *Journal of Mathematics and Statistics* 8(3): 323 – 329.
- [4] Walpole, R.E. 1993. *Pengantar Statistika*. Edisi-3. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.