

AUTOKORELASI PADA BAGAN KENDALI

NILA CHOIROTUNNISA, MAIYASTRI, YUDIANTRI ASDI

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
nilachoirotunnisa@gmail.com, maiyastri@gmail.com, yudiantriasdi@gmail.com*

Abstrak. Dalam penggunaan bagan kendali, data yang mengkonstruksi bagan kendali harus memenuhi asumsi kebebasan dan kenormalan. Autokorelasi melanggar asumsi kebebasan pada bagan kendali dan mengakibatkan proses tidak terkendali. Permasalahan autokorelasi pada suatu proses dapat berasal dari penyebab khusus seperti pengambilan sampel secara periodik atau berasal dari sifat asli data. Autokorelasi yang berasal dari sifat asli data dapat diperbaiki dengan memodelkan data menggunakan model *autoregressive*. Pada makalah ini pengaruh autokorelasi pada bagan kendali dilihat dengan melakukan simulasi pada model *autoregressive* orde satu dengan koefisien *autoregressive* yang bernilai positif. Hasil simulasi menunjukkan bahwa untuk nilai koefisien *autoregressive* $\phi = 0.35$, $\phi = 0.4$ dan $\phi = 0.45$ diperoleh data yang berpola tidak acak. Pemodelan yang dilakukan pada data untuk masing-masing koefisien *autoregressive* tersebut menghasilkan sisaan yang bebas dari pengaruh autokorelasi dan diperoleh proses yang terkendali.

Kata Kunci: Autokorelasi, Bagan Kendali, Model *Autoregressive* Orde Satu, Pengendalian Proses Statistika

1. Pendahuluan

Salah satu metode dari pengendalian mutu statistika adalah pengendalian proses statistika. Bagan kendali merupakan salah satu alat dari pengendalian proses statistika. Bagan kendali digunakan untuk memeriksa apakah suatu proses terkendali. Asumsi dasar penggunaan bagan kendali adalah bahwa data yang diperoleh dari suatu proses yang terkendali bersifat saling bebas dan menyebar normal dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2 dimana nilai μ dan σ^2 tetap [2].

Autokorelasi melanggar asumsi dasar penggunaan bagan kendali, dimana data yang diambil untuk tiap pengamatan haruslah saling bebas. Apabila penyebab autokorelasi pada proses disebabkan oleh penyebab khusus maka dilakukan perbaikan pada proses. Seperti pada permasalahan proses yang disebabkan oleh kinerja karyawan, kondisi mesin dan lain-lain. Akan tetapi, jika penyebab autokorelasi bukan karena penyebab khusus melainkan karena sifat asli dari data maka permasalahan autokorelasi pada bagan kendali dilakukan dengan memodelkan data menggunakan model *autoregressive*. Pada makalah ini, model *autoregressive* yang digunakan adalah model *autoregressive* orde satu.

2. Pengendalian Proses Statistika

Pengendalian proses statistika adalah teknik dasar dari pengendalian mutu statistika. Pengendalian proses statistika merupakan sekumpulan alat penyelesaian masalah yang berguna untuk mengolah data atau informasi yang diperoleh dari suatu proses untuk mengendalikan, meningkatkan dan menjaga kestabilan proses [2].

3. Penyebab Keragaman

Terdapat dua penyebab keragaman pada suatu proses produksi yaitu, penyebab umum dan penyebab khusus. Penyebab umum dari keragaman (*chance causes of variation*) adalah kejadian-kejadian yang merupakan bagian dari proses dan melekat pada proses [2]. Apabila hanya penyebab umum dari keragaman yang terdapat pada proses maka proses dikatakan terkendali. Sedangkan, penyebab khusus dari keragaman (*assignable causes of variation*) adalah kejadian-kejadian yang bukan merupakan bagian dari proses [2]. Apabila terdapat penyebab khusus dari keragaman pada suatu proses produksi maka proses tersebut dikatakan tidak terkendali.

4. Bagan Kendali

Bagan kendali adalah penyajian grafis dari karakteristik mutu sampel yang diukur dan dihitung berdasarkan jumlah sampel atau waktu [2]. Bagan kendali terdiri dari garis tengah (GT) yang merepresentasikan nilai tengah dari karakteristik mutu yang menyatakan proses terkendali, batas kendali atas (BKA) yang merepresentasikan batas atas atau nilai maksimum dari data yang membuat proses dalam keadaan terkendali dan batas kendali bawah (BKB) yang merepresentasikan batas bawah atau nilai minimum dari data yang membuat proses dalam keadaan terkendali.

Bagan kendali digunakan untuk memeriksa apakah suatu proses dalam keadaan terkendali statistika atau tidak. Jika sekurang-kurangnya terdapat satu titik data pengamatan berada di luar batas kendali atau jika tebaran data pengamatan pada bagan kendali membentuk pola yang tidak acak maka proses dikatakan tidak terkendali. Pola tidak acak pada bagan kendali di antaranya pola *run*, pola siklis, pola campuran, pola pergeseran, pola *trend*, pola stratifikasi dan lain-lain.

Misalkan V adalah statistik untuk suatu karakteristik mutu dengan nilai tengah μ_V dan standar deviasi σ_V . Maka batas kendali atas (BKA), garis tengah (GT) dan batas kendali bawah (BKB) dari V didefinisikan sebagai:

$$BKA = \mu_V + L\sigma_V,$$

$$GT = \mu_V,$$

$$BKB = \mu_V - L\sigma_V,$$

dengan L adalah "jarak" dari batas kendali atas atau batas kendali bawah ke garis tengah yang dinyatakan dalam satuan standar deviasi. Biasanya nilai L yang dipilih adalah tiga.

4.1. Jenis-Jenis Bagan Kendali

Jenis-jenis bagan kendali berkaitan erat dengan jenis data yang digunakan pada bagan kendali. Jenis data yang digunakan pada bagan kendali ada dua macam, yaitu data numerik dan data kategori. Data numerik merupakan data kuantitatif yang diukur untuk keperluan analisis. Data kategori merupakan data kualitatif yang dapat dihitung untuk pencatatan dan analisis. Oleh karena itu, bagan kendali dikelompokkan menjadi dua, yaitu bagan kendali variabel dan bagan kendali atribut.

4.1.1. Bagan Kendali Variabel

Suatu karakteristik mutu yang terukur disebut variabel. Misalnya diameter pipa, ketebalan produk, berat semen dalam kantong dan lain-lain. Jika karakteristik mutu dinyatakan sebagai variabel maka perlu dilakukan pengawasan dan pengendalian terhadap nilai tengah dan ragam dari karakteristik mutu tersebut. Pengendalian dapat dilakukan menggunakan bagan kendali variabel. Bagan kendali variabel dapat diklasifikasikan menjadi tiga, yaitu bagan kendali \bar{x} dan R , bagan kendali \bar{x} dan s dan bagan kendali $I-MR$.

Bagan kendali \bar{x} digunakan untuk mengendalikan rata-rata proses dan bagan kendali R digunakan untuk mengendalikan jangkauan dari suatu proses [3]. Apabila ukuran sampel n cukup besar, $n > 10$, maka bagan kendali yang baik untuk mengendalikan jangkauan atau keragaman proses adalah bagan kendali \bar{x} dan s . Sedangkan bagan kendali $I-MR$ atau bagan kendali individual dan jangkauan bergerak digunakan untuk pengendalian proses yang menggunakan sampel berukuran $n = 1$.

4.1.2. Bagan Kendali Atribut

Tidak semua karakteristik mutu dapat dinyatakan sebagai variabel. Hal itu menyebabkan bagan kendali variabel tidak dapat digunakan secara universal. Sebagai contoh, dari suatu proses produksi akan diukur sebuah wadah kaca dari suatu produk yang dikategorikan sebagai bagian sesuai atau bagian tidak sesuai. Maka tidak mungkin pengendalian proses dilakukan menggunakan bagan kendali variabel untuk data kategori tersebut. Oleh karena itu, digunakan bagan kendali atribut untuk mengendalikan proses tersebut. Bagan kendali atribut diklasifikasikan menjadi empat yaitu bagan kendali p , bagan kendali np , bagan kendali c dan bagan kendali u .

Bagan kendali p disebut juga bagan kendali untuk bagian tidak sesuai. Bagian tidak sesuai didefinisikan sebagai perbandingan jumlah item yang tidak sesuai dalam suatu populasi terhadap jumlah item keseluruhan dari populasi tersebut. Sedangkan bagan kendali np disebut juga bagan kendali untuk banyaknya bagian tidak sesuai. Bagan kendali np menunjukkan bagaimana proses diukur berdasarkan jumlah dari ketidaksesuaian, dengan mengalikan ukuran sampel dengan proporsi (np).

Bagan kendali c disebut juga bagan kendali untuk ketidaksesuaian (cacat). Bagian spesifik saat spesifikasi tidak dipenuhi disebut ketidaksesuaian atau cacat.

Bagan kendali u disebut juga bagan kendali untuk unit tidak sesuai. Bagan kendali u adalah bagan kendali yang dibentuk berdasarkan rata-rata dari banyaknya ketidaksesuaian perunit.

5. Deret Waktu (*Time Series*)

Suatu deret waktu adalah himpunan pengamatan-pengamatan yang terurut dan berorientasi waktu dari suatu variabel tertentu [2]. Misalkan T adalah periode waktu dan pengamatan dari peubah X pada waktu t dinyatakan sebagai x_t dimana $t = 1, 2, \dots, T$, maka $\{x_t\}$ adalah deret waktu.

Definisi 5.1. [3] Suatu deret waktu $\{X_t\}$ dikatakan stasioner kuat (stricly stationary) jika sebaran bersama dari pengamatan X_1, \dots, X_t dan X_{1+k}, \dots, X_{t+k} bernilai sama untuk setiap bilangan bulat k dan $t > 0$.

Definisi 5.2. [3] Misalkan fungsi rata-rata $E(X_t) = \mu_t(t)$, kovarian antara X_t dan X_{t+k} , disebut autokovarian pada lag k yang didefinisikan sebagai:

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \mu_{X_t})(X_{t+k} - \mu_{X_{t+k}})].$$

Definisi 5.3. [3] Jika x_1, \dots, x_t adalah pengamatan dari suatu deret waktu $\{x_t\}$, maka fungsi autokovarian sampel didefinisikan sebagai berikut.

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), k = 0, 1, 2, \dots, k,$$

dimana:

$\hat{\gamma}_k$: Fungsi autokovarian sampel saat lag k ,

T : Banyaknya Sampel,

k : Lag waktu,

x_{t+k} : Pengamatan saat $t + k$,

\bar{x} : Rataan sampel.

Definisi 5.4. [1] Suatu deret waktu $\{X_t\}$ dikatakan stasioner lemah jika:

- (1) $E(X_t)$ bebas terhadap t .
- (2) $\gamma(X_t, X_{t+k})$ bebas terhadap t untuk setiap k .

Model deret waktu untuk data pengamatan x_t adalah spesifikasi sebaran bersama (atau hanya nilai rata-rata dan kovarians) dari suatu barisan peubah acak X_t dengan pengamatan x_t [1]. Beberapa model deret waktu di antaranya adalah model *autoregressive* ($AR(p)$), model *moving average* ($MA(q)$), model *autoregressive moving average* ($ARMA(p,q)$) dan model *autoregressive integrated moving average* ($ARIMA(p,d,q)$). Untuk memilih model deret waktu yang tepat dan orde model dari suatu data digunakan fungsi autokorelasi sampel dan fungsi autokorelasi parsial sampel.

Definisi 5.5. [3] Misalkan $\{X_t\}$ adalah deret waktu stasioner. Fungsi autokorelasi dari deret waktu $\{X_t\}$ saat lag k adalah:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+k})}{\text{Cov}(X_t, X_{t+0})} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+k})}{\text{Var}(X_t)} = \text{Cor}(X_t, X_{t+k}).$$

Definisi 5.6. [3] Misalkan x_1, \dots, x_t adalah adalah pengamatan dari suatu deret waktu $\{x_t\}$. Fungsi autokorelasi sampel dari deret waktu $\{x_t\}$ saat lag k adalah:

$$r_k = \hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}.$$

Definisi 5.7. Misalkan $\{X_t\}$ adalah suatu deret waktu. Fungsi autokorelasi parsial dari $\{X_t\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\phi_{kk} = \text{Cor}(X_t, X_{t+k} | X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k-1}).$$

ϕ_{kk} adalah elemen terakhir dari

$$\phi_k = \Gamma_k^{(-1)} \gamma_k,$$

dimana $\Gamma_k = [\gamma_{i-j}]^k$ untuk setiap $i, j = 1, \dots, k$ dan $\gamma_k = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{pmatrix}$ untuk setiap k

dan fungsi autokorelasi parsial sampel dari $\{x_t\}$ adalah:

$$\hat{\phi}_{kk} = \begin{cases} r_k & k = 1, \\ \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-j} \hat{\phi}_{kj}}{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-j} \hat{\phi}_{kj}} & k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

6. Metodologi Penelitian

6.1. Pembangkitan Data dengan Sifat Autokorelasi

1. Data dengan sifat autokorelasi dibangkitkan melalui simulasi data yang dilakukan menggunakan *software Minitab 16*. Berikut adalah langkah-langkah simulasi yang dilakukan:
 - 1.1 Tetapkan jumlah sampel (T) sebanyak 30 sampel.
 - 1.2 Tetapkan ukuran sampel (n) sebanyak lima.
 - 1.3 Tetapkan koefisien *autoregressive* (ϕ), $\phi = 0.35$, $\phi = 0.4$ dan $\phi = 0.45$
 - 1.4 Tetapkan nilai awal (x_0), $x_0 = 1$.
 - 1.5 Tetapkan konstanta (μ), $\mu = 20$.
 - 1.6 Bangkitkan nilai galat (δ_t) secara acak dari sebaran normal dengan ketentuan nilai tengah nol dan ragam dua untuk setiap $t = 1, \dots, T$.
 - 1.7 Agar data memiliki sifat autokorelasi, bentuk suatu model *autoregressive* orde satu dengan menghitung:

$$x_t = \mu_t + \phi x_{t-1} + \delta_t,$$

untuk setiap $t = 1, \dots, T$, dimana x_{t-1} adalah pengamatan pada saat $t-1$.

- 1.8 Bangkitkan nilai galat ε_{ti} secara acak dari sebaran normal dengan ketentuan nilai tengah nol dan ragam satu untuk setiap $t = 1, \dots, T$ dan $i = 1, 2, \dots, n$.
- 1.9 Untuk mengkonstruksi data yang berupa subsampel, hitung

$$x_{ti} = x_t + \varepsilon_{ti},$$

untuk setiap $t = 1, \dots, T$ dan $i = 1, \dots, n$.

- 1.10 Hitung nilai tengah dari x_{ti} , $t = 1, \dots, T$ dan $i = 1, \dots, n$.

$$\bar{x}_t = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ti}}{n}.$$

Sehingga diperoleh nilai \bar{x}_t dimana $t = 1, \dots, T$ yang memiliki sifat autokorelasi orde satu.

2. Data yang diperoleh kemudian diperiksa apakah bersifat autokorelasi. Berikut langkah-langkah yang dilakukan:
 - 2.1 Uji keacakan (*kerandoman*) dari sebaran data \bar{x}_t , $t = 1, \dots, T$, menggunakan uji *run*.
 - 2.2 Plot bagan kendali \bar{x} dari \bar{x}_t , $t = 1, \dots, T$.
 - 2.3 Jika bagan kendali dinyatakan terkendali, proses selesai. Jika bagan kendali dinyatakan tidak terkendali, lanjut ke langkah 2.4.
 - 2.4 Hitung fungsi autokorelasi sampel dari \bar{x}_t .
 - 2.5 Uji signifikansi koefisien autokorelasi sampel dari \bar{x}_t menggunakan uji statistik t .
 - 2.6 Hitung fungsi autokorelasi parsial sampel dari \bar{x}_t .
 - 2.7 Uji signifikansi koefisien autokorelasi parsial sampel dari \bar{x}_t menggunakan uji statistik t .
 - 2.8 Jika data tidak berautokorelasi, proses selesai. Jika data berautokorelasi, lanjutkan ke langkah 1 subbahasan 7.2.

6.2. Penggunaan Model *Autoregressive* Orde Satu (AR(1)) untuk Mengatasi Permasalahan Autokorelasi pada Bagan Kendali

Untuk melihat sifat autokorelasi pada data, data dimodelkan dengan model *autoregressive* orde satu (AR(1)). Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Modelkan data dengan model *autoregressive* orde satu (AR(1)), yaitu:

$$x_t = \mu + \phi x_{t-1} + e_t.$$

2. Duga koefisien *autoregressive* ϕ , yaitu $\hat{\phi}$.
3. Duga nilai konstanta μ , yaitu $\hat{\mu}$.
4. Cari nilai dugaan dari \bar{x}_t , dimana

$$\hat{x}_t = \hat{\mu} + \hat{\phi} \bar{x}_t.$$

5. Hitung nilai sisaan dari model *autoregressive* orde satu, yaitu:

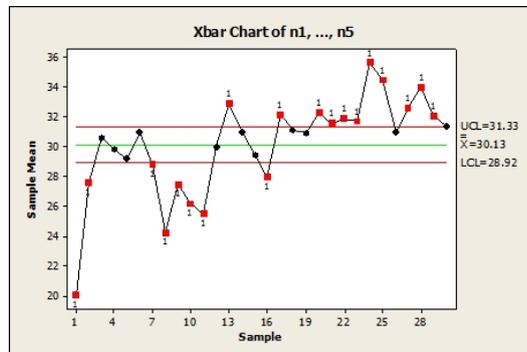
$$e_t = \bar{x}_t - \hat{x}_t$$

6. Uji kebebasan dan kenormalan sisaan e_t .
7. Plot bagan kendali \bar{x} dari sisaan e_t .

7. Hasil dan Pembahasan

Pengaruh autokorelasi pada bagan kendali dilihat dengan melakukan simulasi data menggunakan *software minitab 16*. Data pengamatan disimulasikan memiliki sifat autokorelasi, dengan asumsi bahwa penyebab autokorelasi pada proses bukan diakibatkan oleh penyebab khusus keragaman yang dapat dieleminasi dari proses, tetapi murni melekat pada proses sehingga autokorelasi tidak dapat dihilangkan dari proses.

Pada simulasi ini, ukuran sampel yang ditetapkan adalah lima dan jumlah sampel sebanyak 30 sampel. Simulasi dilakukan untuk beberapa nilai koefisien *autoregressive* ϕ , yaitu $\phi = 0.2$, $\phi = 0.25$, $\phi = 0.3$, $\phi = 0.35$, $\phi = 0.4$, $\phi = 0.45$ dan $\phi = 0.5$. Pada simulasi dengan koefisien *autoregressive* $\phi = 0.2$, $\phi = 0.25$ dan $\phi = 0.3$ tidak diperoleh data pengamatan \bar{x} yang berpola tidak acak, karena autokorelasi belum berpengaruh signifikan pada data. Sedangkan pada simulasi yang dilakukan dengan koefisien *autoregressive* $\phi > 0.45$ data yang diperoleh dari simulasi tidak dapat digunakan untuk mengkonstruksi bagan kendali. Dari simulasi yang dilakukan dengan menggunakan koefisien *autoregressive* $\phi = 0.35$, $\phi = 0.4$ dan $\phi = 0.45$ diperoleh data yang berpola tidak acak. Gambar 1 menunjukkan hasil simulasi dengan koefisien *autoregressive* $\phi = 0.35$.

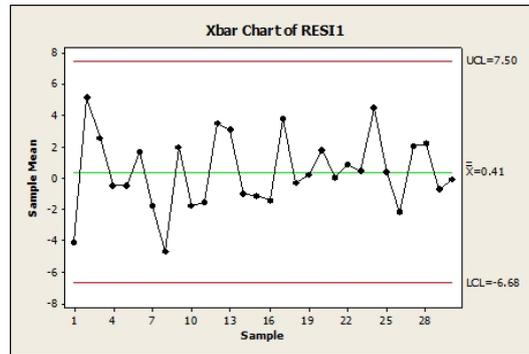


Gambar 1. Bagan Kendali \bar{x} untuk Karakteristik Mutu \bar{x}_t

Dari bagan kendali \bar{x} pada Gambar 1, terdapat 11 pengamatan di luar batas kendali atas dan 8 pengamatan berada di luar batas kendali bawah. Karena pola sebaran data karakteristik mutu \bar{x}_t tidak acak dan terdapat pengamatan yang berada di luar batas kendali maka proses dikatakan tidak terkendali dan diindikasikan terdapat autokorelasi pada bagan kendali. Dengan menganalisis fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsial dari karakteristik mutu \bar{x}_t , diperoleh bahwa terdapat autokorelasi pada *lag* 1.

Selanjutnya, data pengamatan \bar{x}_t dimodelkan menggunakan model *autoregressive* orde satu (AR(1)). Setelah data dimodelkan diperoleh nilai $\hat{\phi} = 7.4498$, nilai $\hat{\mu} = 7.4498$ dan sisaan dari model. Kemudian dilakukan uji kenormalan dan uji kebebasan pada sisaan. Dari pengujian yang dilakukan diketahui bahwa sisaan menyebar normal dan saling bebas. Kemudian dikonstruksi bagan kendali individual dari

sisaan model tersebut seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Bagan Kendali \bar{x} untuk Sisaan e_t

Berdasarkan pengujian yang dilakukan pada sisaan dan plot bagan kendali individual pada Gambar 2 diketahui bahwa proses terkendali. Sehingga, disimpulkan bahwa penggunaan model *autoregressive* orde satu dapat digunakan untuk memperbaiki pengaruh autokorelasi pada bagan kendali.

8. Kesimpulan dan Saran

Autokorelasi pada bagan kendali terjadi apabila data yang mengkonstruksi bagan kendali tidak saling bebas, sehingga menyebabkan pola tidak acak dan mengakibatkan proses tidak terkendali.

Simulasi data yang dilakukan untuk nilai koefisien *autoregressive* $\phi = 0.35$, $\phi = 0.4$ dan $\phi = 0.45$ menghasilkan data dengan pola tidak acak yang menunjukkan bahwa proses tidak terkendali. Untuk menghilangkan pengaruh autokorelasi pada data, data tersebut dimodelkan dengan model *autoregressive* orde satu dan kemudian diperoleh sisaan model. Sisaan model yang menyebar normal dan saling bebas menunjukkan bahwa tidak terdapat autokorelasi pada data dan proses terkendali. Sehingga disimpulkan bahwa model *autoregressive* orde satu dapat digunakan untuk memperbaiki pengaruh autokorelasi pada bagan kendali.

Terdapat berbagai metode yang dapat dilakukan untuk memperbaiki pengaruh autokorelasi pada bagan kendali. Salah satunya dengan menggunakan model deret waktu. Pada makalah ini, deret waktu yang digunakan adalah model *autoregressive* orde satu (AR(1)). Untuk itu, penulis menyarankan untuk membahas penggunaan model deret waktu lain seperti AR(p) dengan orde yang lebih tinggi ($p > 1$), MA(q), ARMA(p,q) atau ARIMA(p,d,q) untuk memperbaiki pengaruh autokorelasi pada bagan kendali.

9. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada kepada Ibu Izzati Rahmi H.G, M.Si, Ibu Hazmira Yozza, M.Si dan Bapak Dr. Dodi Devianto yang telah memberikan

masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Brockwell, P.J. and Davis, R.A. 2002. *Introduction to Time Series and Forecasting*, Second Edition. Springer-Verlag New York, Inc. United States of America.
- [2] Montgomery, D.C. 2009. *Introduction to Statistical Quality Control*, Sixth Edition. John Wiley And Son, Inc. New York.
- [3] Montgomery, D.C. and Jennings, C.L. 2008. *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting*. John Wiley And Son, Inc. United States of America.
- [4] Montgomery, D.C. 1992. *Introduction To Linear Regression Analysis*, Second Edition. John Wiley And Son, Inc. New York.
- [5] Requeijo, J.G. and Souza, A. M. 2011. T2 Control Chart To Processes With Cross-Autocorrelation. *Proceedings of the 41st International Conference on Computers and Industrial Engineering* pp. 822 – 827. Los Angeles.