

SIFAT-SIFAT PENGEMBANGAN RING ARMENDARIZ DAN RING MCCOY

SRI WAHYUNI, YANITA, ADMI NAZRA

*Program Studi Magister Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
ahyu.sri@gmail.com, yanitao@yahoo.com, adminazra@fmipa.unand.ac.id*

Abstrak. Ring Armendariz dikembangkan menjadi ring Armendariz linier, ring Armendariz linier sentral dan ring Armendariz sentral. Begitu juga dengan ring McCoy juga dikembangkan menjadi ring McCoy linier, ring McCoy linier sentral dan ring McCoy sentral. Sifat-sifat dari masing-masing pengembangan tersebut dikaji, termasuk kaitan antara kedua pengembangan tersebut.

Kata Kunci: Pengembangan ring Armendariz, pengembangan ring McCoy

1. Pendahuluan

Definisi ring Armendariz pertama kali diperkenalkan oleh Rege dan Chhawchharia [18]. Nama "ring Armendariz" dipilih karena definisi tersebut adalah kelemahan dari lema yang ditulis oleh Armendariz pada [4]. Sementara ring McCoy sendiri diperkenalkan oleh McCoy [15]. Ring Armendariz dan ring McCoy banyak dikaji oleh para peneliti, terutama tentang sifat-sifat serta pengembangannya. Sifat-sifat ring Armendariz yang dikaji antara lain, tentang sifat-sifat yang terkait dengan ring tereduksi dan ring Gauss [3]. Kajian ini dilanjutkan dengan mengaitkan keberadaan elemen idempoten dan elemen sentral pada suatu ring oleh Kim dan Lee. Kemudian sifat ring Armendariz yang berkaitan dengan sifat ring semikomutatif dikaji oleh Huh, Lee dan Smoktunowicz. Perkembangan kajian tentang ring Armendariz kemudian dilanjutkan dengan diperkenalkannya konsep pengembangan ring Armendariz. Salah-satu dari pengembangan tersebut adalah ring Armendariz lemah [12]. Sementara itu sifat-sifat ring McCoy yang dikaji antara lain dapat dilihat pada [7] dan [17]. Kajian tersebut terkait ring McCoy dengan ring semikomutatif, ring reversibel serta pengembangan ring McCoy berupa ring McCoy linier. Kajian ini merujuk secara khusus pada referensi [1], [2], [12], [17], dan [7]. Khusus untuk McCoy sentral dan McCoy linier sentral pada tulisan ini merupakan kajian baru.

Kajian ini dibatasi pada pengembangan ring Armendariz berupa ring Armendariz linier, Armendariz sentral dan Armendariz linier sentral. Sama halnya dengan ring Armendariz, ring McCoy juga dikembangkan menjadi ring McCoy linier, McCoy sentral dan McCoy linier sentral.

Tujuan utama dari penelitian ini adalah untuk melihat sifat-sifat dari pengembangan ring Armendariz dan pengembangan ring McCoy, serta kaitan keduanya.

2. Sifat-sifat dari Pengembangan Ring Armendariz dan Ring McCoy

Ring R disebut Armendariz linier, jika polinomial linier $f(x) = a_0 + a_1x, g(x) = b_0 + b_1x \in R[x]$ memenuhi $f(x)g(x) = 0$, maka untuk setiap $i, j \in \{0, 1\}$ berlaku $a_i b_j = 0$.

Setelah ring Armendariz dikembangkan menjadi ring Armendariz linier, maka ring Armendariz linier juga dapat dikembangkan menjadi ring Armendariz linier sentral. Ring R disebut Armendariz linier sentral, jika polinomial linier $f(x) = a_0 + a_1x, g(x) = b_0 + b_1x \in R[x]$ memenuhi $f(x)g(x) = 0$, maka untuk setiap $i, j \in \{0, 1\}$ berlaku $a_i b_j \in C(R)$. Kaitan antara ring Armendariz linier dengan ring Armendariz linier sentral diberikan pada lema berikut ini.

Lema 2.1. [1] *Jika R adalah ring Armendariz linier maka R adalah ring Armendariz linier sentral.*

Berikut teorema tentang kaitan ring Armendariz linier sentral dengan ring Abelian.

Teorema 2.2. [1] *Jika R adalah ring Armendariz linier sentral maka R adalah ring Abelian.*

Sifat berikutnya adalah ring Armendariz linier sentral merupakan ring tereduksi. Untuk lebih jelasnya diberikan lema berikut.

Lema 2.3. [1] *Misalkan R adalah suatu ring von Neumann regular. Jika R adalah ring Armendariz linier sentral maka R adalah ring tereduksi.*

Bukti. Dari Teorema 2.2 diperoleh ring Armendariz linier sentral adalah ring Abelian. Kemudian diketahui bahwa ring von Neumann regular adalah tereduksi jika dan hanya jika R ring Abelian. Jadi terbukti bahwa R adalah ring tereduksi. $\square$

Sifat selanjutnya adalah ring tereduksi merupakan ring semikomutatif. Untuk lebih jelasnya diberikan lema berikut.

Lema 2.4. [1] *Jika R adalah ring tereduksi maka R adalah ring semikomutatif.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa R adalah ring semikomutatif. Ambil sebarang $a, b \in R$ dengan $ab = 0$. Karena R ring tereduksi maka R ring reversibel, artinya jika $ab = 0$ maka $ba = 0$. Ambil sebarang $c \in R$, kemudian $(acb)^2 = acbacb = ac.ba.cb = ac.0.cb = 0$. Jadi diperoleh $acb = 0$ untuk setiap $c \in R$. Terbukti R adalah ring semikomutatif. $\square$

Sifat berikutnya adalah ring semikomutatif merupakan ring tereduksi. Untuk lebih jelasnya diberikan lema berikut.

Lema 2.5. [1] *Misalkan R adalah suatu ring von Neumann regular. Jika R adalah ring semikomutatif maka R adalah ring tereduksi.*

Bukti. Misalkan R ring semikomutatif dan sekaligus ring von Neumann regular. Ambil sebarang unsur nilpoten di R yaitu a , akan dibuktikan unsur nilpotennya hanyalah nol. Karena a adalah unsur nilpoten di R maka $a^n = 0$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$. Misalkan $n = 2$ maka $a^2 = aa = 0$. Karena R ring semikomutatif maka

$$aba = 0, b \in R. \quad (2.1)$$

Karena R ring von Neumann regular, maka untuk setiap $a \in R$ terdapat $b \in R$ sehingga diperoleh

$$aba = a. \quad (2.2)$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2) maka diperoleh $a = 0$. Sehingga terbukti bahwa R ring tereduksi. $\square$

Kajian berikutnya adalah ring tereduksi merupakan ring Armendariz. Untuk lebih jelasnya diberikan lema berikut.

Lema 2.6. [1] *Jika R adalah ring tereduksi maka R adalah ring Armendariz.*

Dari lema-lema di atas, diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 2.7. [1]. *Misalkan R adalah ring von Neumann regular. Maka semua pernyataan berikut adalah ekuivalen.*

- (1) R adalah ring Armendariz.
- (2) R adalah ring tereduksi.
- (3) R adalah ring Armendariz linier sentral.
- (4) R adalah ring Armendariz linier.
- (5) R adalah ring semikomutatif.

Bukti. (1) $\Rightarrow$ (4) jelas dari definisi,
 (4) $\Rightarrow$ (3) terbukti dari Lema 2.2,
 (3) $\Rightarrow$ (2) terbukti dari Lema 2.3,
 (2) $\Rightarrow$ (5) terbukti dari Lema 2.4,
 (5) $\Rightarrow$ (2) terbukti dari Lema 2.5 dan
 (2) $\Rightarrow$ (1) terbukti dari Lema 2.6. $\square$

Selanjutnya dibahas mengenai kaitan ring Armendariz linier sentral dengan ring tereduksi sentral. Ring R disebut ring tereduksi sentral jika setiap elemen nilpoten merupakan sentral. Jelas bahwa ring tereduksi merupakan ring tereduksi sentral. Teorema berikut menyatakan kaitan ring tereduksi sentral dengan ring Armendariz linier sentral.

Teorema 2.8. [1]. *Jika R adalah ring tereduksi sentral maka R adalah ring Armendariz linier sentral.*

Bukti. Misalkan $f(x) = a_0 + a_1x, g(x) = b_0 + b_1x \in R[x]$. Asumsikan $f(x)g(x) = 0$. Sehingga diperoleh:

$$a_0b_0 = 0, \quad (2.3)$$

$$a_0b_1 + a_1b_0 = 0, \quad (2.4)$$

$$a_1b_1 = 0. \quad (2.5)$$

Karena $(b_0a_0)^3 = 0$ dan $(b_1a_1)^2 = 0$, $b_0a_0b_1a_1 \in C(R)$, dimana $C(R)$ adalah centre dari R . Kalikan 2.4 dari kanan oleh a_0 , diperoleh $a_0b_1a_0 + a_1b_0a_0 = 0$. Maka $a_0b_1a_0 + a_0b_0a_1 = 0$. Kalikan persamaan terakhir dari kanan dengan a_0 , diperoleh $a_0^2b_1a_0 = 0$ dan juga $(a_0b_1a_0)^2 = 0$, yaitu $a_0b_1a_0 \in C(R)$. Oleh karena itu $(a_0b_1)^3 = 0$ dan $a_0b_1 \in C(R)$. Sehingga terbukti bahwa $a_1b_0 \in C(R)$. $\square$

Selanjutnya kajian mengenai ring Armendariz sentral. Ring R disebut Armendariz sentral, jika $f(x)g(x) = 0$, dengan $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \in R[x]$ maka untuk setiap $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ dan $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ berlaku $a_ib_j \in C(R)$. Jelas bahwa jika R ring Armendariz sentral maka R ring Armendariz linier sentral. Ring Armendariz merupakan ring Armendariz sentral. Namun tidak berlaku sebaliknya.

Teorema 2.9. [1] *Jika R ring Armendariz maka R ring Armendariz sentral.*

Berikut ini diberikan teorema yang menyatakan bahwa R ring Armendariz linier jika dan hanya jika $R[x]$ ring Armendariz linier.

Teorema 2.10. [1] *Ring R Armendariz linier jika dan hanya jika $R[x]$ Armendariz linier.*

Bukti. ($\Leftarrow$) Diketahui $R[x]$ Armendariz linier. Dibuktikan R ring Armendariz linier. R adalah subring dari $R[x]$. Subring dari ring Armendariz linier adalah ring Armendariz linier.

($\Rightarrow$) Diketahui R adalah ring Armendariz linier. Dibuktikan $R[x]$ Armendariz linier. Ambil $f(T), g(T) \in R[x][T]$ dengan $f(T)g(T) = 0, f(T) = f_0 + f_1T, g(T) = g_0 + g_1T$ dengan $f_i, g_j \in R[x]$. Dibuktikan $f_i g_j = 0$ untuk setiap $i = \{0, 1\}$ dan $j = \{0, 1\}$. Misalkan $0 = \text{derajat}(f_0) + \text{derajat}(f_1) + \text{derajat}(g_0) + \text{derajat}(g_1)$, dimana $(\text{derajat}(f_i), \text{derajat}(g_j))$ adalah 1 dan derajat polinom nol adalah 0. Dengan demikian,

$$f(x^k), g(x^k) \in R[x],$$

dengan

$$f(x^k) = f_0 + f_1x^k,$$

$$g(x^k) = g_0 + g_1x^k,$$

dan himpunan koefisien $f_i(g_j)$ sama dengan himpunan koefisien $f(x^k)(g(x^k))$, karena $f(T)g(T) = 0$, yaitu

$$f(T)g(T) = (f_0 + f_1T)(g_0 + g_1T) = 0,$$

jadi

$$0 = f_0g_0 + f_0g_1T + f_1g_0T + f_1g_1T^2,$$

dan x indeterminasi R maka $f(x^k)g(x^k) = 0$. Karena R Armendariz linier, berarti setiap koefisien f_i mengakibatkan koefisien $g_j = 0$ atau $a_ib_j = 0$ untuk setiap $i, j = \{0, 1\}$. Jadi terbukti bahwa $f_ig_j = 0$ atau $R[x]$ Armendariz linier. $\square$

Kajian selanjutnya adalah pengembangan ring McCoy berupa ring McCoy linier, ring McCoy sentral dan ring McCoy linier sentral.

Ring R disebut ring McCoy linier kanan, jika $f(x)g(x) = 0$, dengan $f(x) = a_0 + a_1x, g(x) = b_0 + b_1x \in R[x] \setminus \{0\}$ maka $f(x)r = 0$ untuk suatu $r \in R$ dengan $r \neq 0$. Ring R disebut ring McCoy linier kiri, jika $f(x)g(x) = 0$, dengan $f(x) = a_0 + a_1x, g(x) = b_0 + b_1x \in R[x] \setminus \{0\}$ maka $r(g(x)) = 0$ untuk suatu $r \in R$ dengan $r \neq 0$. Ring R disebut ring McCoy linier jika R McCoy linier kanan dan R McCoy linier kiri.

Jelas bahwa jika R adalah ring McCoy maka R adalah ring McCoy linier. Berikut ini dikaji kaitan antara ring McCoy linier kanan dengan ring semikomutatif dan ring Dedekind berhingga.

Proposisi 2.11. *Semua ring semikomutatif adalah McCoy linier.*

Bukti. Misalkan R ring semikomutatif, dan ambil sebarang $f(x) = a_0 + a_1x, g(x) = b_0 + b_1x \in R[x]$ dengan $f(x)g(x) = 0$. Sehingga

$$(a_0 + a_1x)(b_0 + b_1x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_1b_1x^2 = 0, \quad (2.6)$$

$$a_0b_0 = 0, \quad (2.7)$$

$$a_0b_1 + a_1b_0 = 0, \quad (2.8)$$

$$a_1b_1 = 0. \quad (2.9)$$

Akan ditunjukkan terdapat $r, s \in R$ dengan $r, s \neq 0$ sehingga berlaku $f(x)r = 0$ dan $s(g(x)) = 0$. Pembuktian akan diperiksa atas empat kondisi berikut.

Kondisi 1

Jika $a_0 = 0$ dan $b_0 \neq 0$ maka $f(x) = a_1x$ sehingga $f(x)g(x) = (a_1x)(b_0 + b_1x) = a_1b_0x + a_1b_1x^2 = 0$. Dari persamaan (2.9) diperoleh $a_1b_0 = 0$, sehingga

$$f(x)b_0 = (a_1x)b_0 = a_1b_0x = 0, \quad (2.10)$$

$$a_1g(x) = a_1(b_0 + b_1x) = a_1b_0 + a_1b_1x = 0. \quad (2.11)$$

Akibatnya terdapat $b_0, b_1, a_1 \in R$ dengan $b_0, b_1, a_1 \neq 0$ sedemikian sehingga $f(x)b_0 = f(x)b_1 = a_1(g(x)) = 0$.

Kondisi 2

Jika $a_0 \neq 0$ dan $b_0 = 0$ maka $g(x) = b_1x$ sehingga

$$f(x)g(x) = (a_0 + a_1x)(b_1x) = a_0b_1x + a_1b_1x^2 = 0. \quad (2.12)$$

Dari persamaan (2.9) maka diperoleh $a_0b_1 = 0$. Dari persamaan (2.12) diperoleh

$$a_0b_1 + a_1b_1x = 0, \quad (2.13)$$

$$(a_0 + a_1x)b_1 = 0, \quad (2.14)$$

$$f(x)b_1 = 0. \quad (2.15)$$

Dari (2.9) dan (2.15) maka

$$a_0(g(x)) = a_0b_1x = 0. \quad (2.16)$$

$$a_1(g(x)) = a_1b_1x = 0. \quad (2.17)$$

Akibatnya $b_1, a_0, a_1 \in R$ dengan $b_1, a_0, a_1 \neq 0$ sedemikian sehingga $f(x)b_1 = a_0(g(x)) = a_1(g(x)) = 0$.

Kondisi 3

Misalkan $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$. Maka terbukti bahwa ada $r, s \in R$ dengan $r, s \neq 0$ sehingga $f(x)r = f(x)b_0 = 0$ dan $sg(x) = a_0g(x) = 0$. Jadi terbukti bahwa R ring McCoy linier.

Selanjutnya, asumsikan bahwa $a_1b_0 \neq 0$. Maka dari persamaan (2.8) diperoleh $a_0b_1 \neq 0$. Maka dapat dipilih $r = a_1b_0 \neq 0$ dan $s = a_0b_1 \neq 0$ sehingga

$$f(x)r = f(x)(a_1b_0) = (a_0 + a_1x)(a_1b_0) = a_0a_1b_0 + a_1a_1b_0x. \quad (2.18)$$

dan

$$sg(x) = (a_0b_1)g(x) = (a_0b_1)(b_0 + b_1x) = a_0b_1b_0 + a_0b_1b_1x. \quad (2.19)$$

Perhatikan bahwa karena R ring semikomutatif maka dari persamaan (2.7) dan (2.9) diperoleh

$$a_0b_0 = 0 \Rightarrow a_0b_1b_0 = 0, \quad (2.20)$$

$$a_0b_0 = 0 \Rightarrow a_0a_1b_0 = 0, \quad (2.21)$$

$$a_1b_1 = 0 \Rightarrow a_1a_0b_1 = 0, \quad (2.22)$$

$$a_1b_1 = 0 \Rightarrow a_1b_0b_1 = 0. \quad (2.23)$$

Sekarang kalikan persamaan (2.8) dengan a_1 pada sisi kiri, sehingga

$$0 = a_1(a_1b_0 + a_0b_1) = a_1a_1b_0 + a_1a_0b_1, \quad (2.24)$$

dari persamaan (2.22) diperoleh $a_1a_0b_1 = 0$ sehingga

$$a_1a_1b_0 = 0. \quad (2.25)$$

Kalikan juga persamaan (2.8) dengan b_1 pada sisi kanan, sehingga

$$0 = (a_1b_0 + a_0b_1)b_1 = a_1b_0b_1 + a_0b_1b_1 \quad (2.26)$$

dari persamaan (2.23) diperoleh $a_1b_0b_1 = 0$ sehingga

$$a_0b_1b_1 = 0. \quad (2.27)$$

dari persamaan (2.21) dan (2.25) terbukti bahwa $f(x)a_1b_0 = 0$ dan dari persamaan (2.20) dan (2.27) terbukti bahwa $a_0b_1g(x) = 0$. Sehingga terbukti bahwa R adalah ring McCoy linier. $\square$

Teorema 2.12. [7] *Jika R adalah ring McCoy linier kanan maka R adalah Dedekind berhingga.*

Sama halnya dengan pengembangan ring Armendariz, ring McCoy linier juga dapat dikembangkan menjadi ring McCoy linier sentral. Berikut ini diberikan definisi ring McCoy linier sentral. Ring R disebut McCoy sentral, jika $f(x)g(x) = 0$, dengan $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + a_mx^m \in R[x] \setminus \{0\}$ maka terdapat $r, s \in R$ dengan $r, s \neq 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ dan $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ berlaku $a_ir \in C(R)$ dan $sb_j \in C(R)$. Ring R disebut McCoy linier sentral, untuk setiap $i, j \in \{0, 1\}$. Karena jelas bahwa jika R ring McCoy sentral maka R ring McCoy linier sentral dan jika R adalah ring McCoy linier maka R adalah ring McCoy linier sentral.

Selanjutnya dikaji kaitan antara pengembangan ring Armendariz dan pengembangan ring McCoy.

Teorema 2.13. [7] *Jika R adalah ring Armendariz linier maka R adalah ring McCoy linier.*

Teorema 2.14. *Jika R adalah ring Armendariz sentral maka R adalah ring McCoy sentral.*

Bukti. Misalkan $f(x)g(x) = 0$ dengan $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x]$. Karena R ring Armendariz sentral maka diperoleh $a_ib_j \in C(R)$ untuk setiap $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ dan $j \in \{0, 1, \dots, m\}$. Akan dibuktikan $a_ir \in C(R)$ dan $sb_j \in C(R)$ untuk suatu $r, s \in R$ dengan $r, s \neq 0$. Perhatikan bahwa karena $f(x), g(x)$ polinomial tak nol maka $a_n, b_m \neq 0$. Pilih $r = b_m$ dan $s = a_n$. Karena R ring Armendariz sentral maka diperoleh $a_ir = a_ib_1 \in C(R)$ dan $sb_j = a_1b_j \in C(R)$. Jadi terbukti bahwa R ring McCoy sentral. $\square$

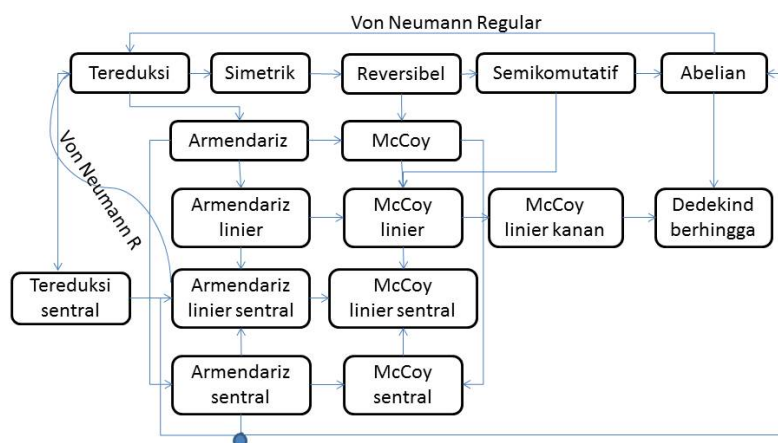
Jadi jelas bahwa jika R adalah ring Armendariz linier sentral maka R adalah ring McCoy linier sentral.

3. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dipaparkan diperoleh kesimpulan mengenai sifat-sifat dari pengembangan ring Armendariz dan ring McCoy yang dituliskan dalam Gambar 1, dengan keterangan bahwa tanda $(\rightarrow)$ artinya kaitan jika $\dots$ maka $\dots$.

Daftar Pustaka

- [1] Agayev, N., Harmanci, A. dan Halicioglu, S., 2009. Extended Armendariz Rings, *Algebras Groups Geom.*
- [2] Agayev, N., dkk, 2011. Central Armendariz Rings, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*
- [3] Anderson, D. D. dan Camillo, V., 1998. Armendariz rings and Gaussian rings, *Comm. Algebra*
- [4] Armendariz, E., 1973. A note on extensions of Baer and p.p.-rings, *J. Austral. Math. Soc.*
- [5] Bhattacharya, P. B. dan Jain, S. K., 1976. *First Course in Ring, Fields and Vector Spaces*, Wiley Eastern Limited. New Delhi
- [6] Bhattacharya, P. B. , Jain, S. K., dan Nagpaul, S. R., 1994. *Basic Abstract Algebra*, Cambridge University Press. Cambridge



Gambar 1. Kesimpulan

- [7] Camillo, V. dan Neilson, P. P., 2008. McCoy Rings and Zero Divisors, *Journal of Pure and Applied Algebra*
- [8] Fraleigh, J. B., 1994. *A First Course in Abstract Algebra*, Pearson Education. Narragansett.
- [9] Goodearl, K. R., (1991). *Von Neumann regular Rings*, Krieger Publishing Co.
- [10] Huh, C., Lee, Y. dan Smoktunowicz, A., 2002. Armendariz rings and semicommutative rings, *Comm. Algebra*
- [11] Kim, N. K. dan Lee, Y., 2000. Armendariz rings and reduced rings, *J. Algebra*
- [12] Lee, T. K. dan Wong, T. L., 2003. On Armendariz rings, *Houston J. Math.*
- [13] Lee, T. K. dan Zhou, Y. 2004. Armendariz and reduced rings, *Comm. Algebra*
- [14] Liu, L. dan Zhao, R., (2006). On weak Armendariz rings, *Comm. Algebra*
- [15] McCoy, N. H., 1942. Remarks on divisors of zero, *Amer. Math. Monthly*
- [16] Musili, C., 1992. *Introduction to Rings and Modules*, Narosa. New Delhi.
- [17] Pourtaherian, H. dan Rakhimov, I. S., 2012. On Some Classes of Rings and Theirs Links, *Algebras Groups Geom.*
- [18] Rege, M. B. dan Chhawchharia, S., 1997. Armendariz rings, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*