Jurnal Matematika UNAND
Vol. **3** No. **3** Hal. 26 – 33
ISSN : 2303–291X

WARP PADA SEBUAH SEGITIGA

ABDUL ZAKY, MAHDHIVAN SYAFWAN
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
zakimathua@yahoo.com

Abstrak. *Warp* pada sebuah segitiga merupakan salah satu aplikasi dari transformasi Afin yang menjadi dasar dari teknik manipulasi gambar. Teorema-teorema terkait beserta contoh dari proses *warp* dijelaskan pada makalah ini.

Kata Kunci: *Warp*, transformasi Afin

1. Pendahuluan

Salah satu teknik manipulasi gambar yang sangat menarik yaitu dengan mendistorsikan berbagai potongan segitiga pada sebuah gambar ke posisi dan ukuran yang berbeda. Teknik manipulasi gambar ini dinamakan teknik *warp*.

Warp memiliki banyak aplikasi di dunia nyata, diantaranya:

(1) Pembuatan efek-efek khusus dan animasi pada film.
(2) Penelitian terhadap evolusi dari bentuk-bentuk organisme.
(3) Bedah plastik dan rekonstruksi wajah.
(4) Pengubahan umur pada foto orang hilang atau buronan polisi.

Teknik *warp* dikembangkan dari konsep transformasi Afin. Mengingat aplikasinya yang sangat bermanfaat, maka tentu akan sangat menarik untuk membahas lebih detail bagaimana transformasi Afin digunakan dalam proses *warp*. Makalah ini akan membahas proses *warp* pada sebuah segitiga yang merupakan salah satu topik aplikasi pada referensi [1].

2. Kombinasi Cembung, Transformasi Afin, dan Verteks

Pada bagian ini disajikan teori-teori dasar yang digunakan pada proses *warp* pada sebuah segitiga. Berikut diberikan definisi kombinasi cembung, transformasi Afin dan verteks.

Definisi 2.1. [*1*] *Suatu vektor* $\mathbf{v}$ *dikatakan suatu* ***kombinasi cembung (convex combination)*** *dari vektor-vektor* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$, *jika vektor-vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk*

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n,$$

dimana $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n = 1$ *dan* $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n$ *adalah skalar tak-negatif.*

Definisi 2.2. [*2*] *Suatu pemetaan* $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$*, dimana* $\mathbb{E}^2$ *adalah bidang Euclid, dikatakan suatu* ***transformasi Afin****, jika terdapat matriks* $\mathrm{A}_{2\times 2}$ *yang dapat dibalik dan suatu vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *berlaku*

$$T(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) + \mathbf{b}.$$

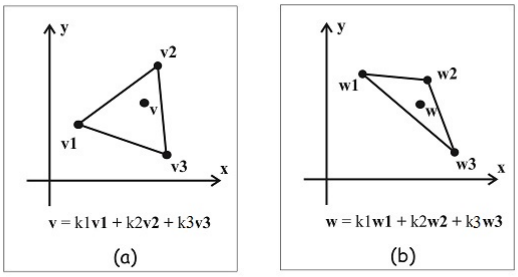
Definisi 2.3. [*1*] *Suatu vektor* $\mathbf{p}$ *dikatakan* ***verteks*** (x, y) *jika vektor* $\mathbf{p}$ *tersebut berpangkal di titik* $(0,0)$ *dan berujung di titik* (x, y)*.*

3. *Warp* dan Teorema Terkait

Warp adalah salah satu teknik manipulasi gambar dengan cara memindahkan berbagai potongan segitiga yang terbentuk dari gambar tersebut [1]. *Warp* berarti melengkungkan atau membengkokkan. Apabila sebuah titik yang terdapat pada sebuah potongan gambar dipindahkan, maka bentuk dari gambar akan melengkung.

Teorema-teorema yang terkait pada pembahasan ini akan dijelaskan melalui ilustrasi singkat tentang proses *warp* pada sebuah segitiga berikut ini. Proses *warp* pada sebuah segitiga diawali dengan mendeskripsikan sebuah *warp* dari sebuah segitiga pada suatu bidang $\mathbb{R}^2$. Pada segitiga tersebut terdapat tiga buah titik sudut (*verteks*), misalkan dinyatakan oleh $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ yang masing-masingnya tidak segaris *(nonkolinear)* (lihat Gambar 1(a)). Segitiga ini disebut dengan segitiga awal (*begin-triangle*). Jika $\mathbf{v}$ adalah sebarang titik di dalam segitiga awal, maka terdapat konstanta-konstanta tunggal k_1 dan k_2 dengan $k_1 \geq 0$ dan $k_2 \geq 0$ sedemikian rupa sehingga

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_3 = k_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + k_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3). \tag{3.1}$$



Gambar 1. Me-*warp*-kan segitiga

Persamaan (3.1) menyatakan vektor $\mathbf{v} - \mathbf{v}_3$ sebagai kombinasi linier dari dua vektor $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$ dan $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ yang bebas linier. Misalkan $k_3 = 1 - k_1 - k_2$, maka persamaan (3.1) menjadi

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3, \tag{3.2}$$

dimana

$$k_1 + k_2 + k_3 = 1. \tag{3.3}$$

Dari persamaan (3.2) dan (3.3) dapat dikatakan bahwa $\mathbf{v}$ adalah kombinasi cembung dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$ dengan konstanta tak-negatif k_1, k_2, dan k_3.

Teorema 3.1. [1] *Jika vektor* $\mathbf{v}$ *adalah sebuah kombinasi cembung dari* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$*, maka ujung vektor* $\mathbf{v}$ *terletak di dalam sebuah segitiga yang menghubungkan ujung-ujung ketiga vektor* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$*, dan* $\mathbf{v}_3$*.*

Untuk membuktikan teorema di atas diperlukan dua lema berikut.

Lema 3.2. [1] *Misalkan* $\mathbf{a}$ *dan* $\mathbf{b}$ *adalah vektor-vektor bebas linier pada suatu bidang. Jika* k_1 *dan* k_2 *adalah bilangan tak-negatif dengan* $k_1 + k_2 = 1$*, maka vektor* $k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}$ *terletak pada suatu segmen garis yang menghubungkan ujung vektor* $\mathbf{a}$ *dan ujung vektor* $\mathbf{b}$*.*

Bukti. Karena k_1 dan k_2 adalah konstanta tak-negatif yang memenuhi $k_1+k_2 = 1$, maka $k_2 = 1 - k_1$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} &= k_1\mathbf{a} + (1 - k_1)\mathbf{b} \\ &= k_1\mathbf{a} + \mathbf{b} - k_1\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} + k_1(\mathbf{a} - \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Persamaan terakhir menunjukkan bahwa vektor $k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}$ berada pada segmen garis yang menghubungkan ujung vektor $\mathbf{a}$ dan ujung vektor $\mathbf{b}$. □

Lema 3.3. [1] *Jika suatu vektor* $\mathbf{b} + k_1(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ *berada pada segmen garis yang menghubungkan ujung vektor* $\mathbf{a}$ *dan ujung vektor* $\mathbf{b}$*, maka untuk* $k_1 + k_2 \leq 1$*,* $k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}$ *berada di dalam suatu segitiga yang menghubungkan titik asal dengan ujung vektor* $\mathbf{a}$ *dan ujung vektor* $\mathbf{b}$*.*

Bukti. Misalkan $\mathbf{b} + k_1(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ merupakan vektor yang berada pada segmen garis yang menghubungkan ujung vektor $\mathbf{a}$ dan ujung vektor $\mathbf{b}$. Karena $k_1+k_2 \leq 1$, maka $k_2 \leq 1 - k_1$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \|k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}\| &\leq \|k_1\mathbf{a} + (1 - k_1)\mathbf{b}\| \\ &\leq \|k_1\mathbf{a} + \mathbf{b} - k_1\mathbf{b}\| \\ &\leq \|\mathbf{b} + k_1\mathbf{a} - k_1\mathbf{b}\| \\ &\leq \|\mathbf{b} + k_1(\mathbf{a} - \mathbf{b})\|. \end{aligned}$$

Dari hubungan di atas dapat disimpulkan bahwa vektor $k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}$ lebih pendek atau sama dengan vektor $\mathbf{b} + k_1(\mathbf{a} - \mathbf{b})$. Jadi vektor $k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}$ berada di dalam segitiga yang menghubungkan titik $(0, 0)$ dengan ujung vektor $\mathbf{a}$ dan ujung vektor $\mathbf{b}$. □

Berikut dijelaskan bukti Teorema 3.1.

Bukti. Misalkan vektor $\mathbf{v}$ merupakan kombinasi cembung dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Dengan demikian $k_1 + k_2 + k_3 = 1$ dan $k_1, k_2, k_3 \geq 0$, sehingga berlaku

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 \\
&= k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + (1 - k_1 - k_2)\mathbf{v}_3 \\
&= k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - k_1\mathbf{v}_3 - k_2\mathbf{v}_3. \\
&= k_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + k_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + \mathbf{v}_3 \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Tulis $\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$ dan $\mathbf{b} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$. Artinya $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ adalah dua vektor yang sama-sama memiliki titik pangkal di ujung vektor $\mathbf{v}_3$. Jadi persamaan (3.4) dapat ditulis

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} + \mathbf{v}_3 \\
\Leftrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{v}_3 &= k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa $k_1 + k_2 + k_3 = 1$, dengan k_1, k_2, k_3 tak-negatif, mengakibatkan $k_1 + k_2 \leq 1$. Berdasarkan Lema 3.3, $\mathbf{v} - \mathbf{v}_3 = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}$ berada di dalam segitiga yang menghubungkan titik pangkal $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ (dalam hal ini ujung vektor $\mathbf{v}_3$) dengan ujung vektor $\mathbf{a}$ (dalam hal ini ujung vektor $\mathbf{v}_1$) dan ujung vektor $\mathbf{b}$ (dalam hal ini ujung vektor $\mathbf{v}_2$). Karena ujung vektor $\mathbf{v} - \mathbf{v}_3$ sama dengan ujung vektor $\mathbf{v}$ maka dapat disimpulkan bahwa ujung vektor $\mathbf{v}$ terletak di dalam segitiga yang menghubungkan ujung vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$. $\square$

Selanjutnya diberikan tiga vektor $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$, dan $\mathbf{w}_3$ yang merupakan titik-titik sudut dari segitiga pada Gambar 1(b) (disebut segitiga akhir (*end-triangle*)). Misalkan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_3$ pada gambar awal dan $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$,$\mathbf{w}_3$ pada gambar akhir dapat dibuat hubungan

$$\mathbf{w}_i = A\mathbf{v}_i + \mathbf{b} \qquad \text{untuk } i \;=\; 1, 2, 3, \qquad (3.5)$$

dimana A matriks 2×2 yang unik dan dapat dibalik dan $\mathbf{b}$ vektor berdimensi 2. Maka berdasarkan Definisi 2.2, terdapat sebuah transformasi Afin yang memetakan $\mathbf{v}_1$ ke $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{v}_2$ ke $\mathbf{w}_2$ dan $\mathbf{v}_3$ ke $\mathbf{w}_3$.

Teorema 3.4. [1] *Misalkan suatu transformasi Afin diberikan oleh sebuah matriks* A 2×2, *dan sebuah vektor* $\mathbf{b}$. *Misalkan* $\mathbf{w} = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$ *dan* $\mathbf{w}_i = A\mathbf{v}_i + \mathbf{b}$ *untuk* $i = 1, 2, 3$. *Jika* $\mathbf{v}$ *kombinasi cembung dari* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, *maka* $\mathbf{w}$ *adalah kombinasi cembung dari* $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$, *yaitu*

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + k_3\mathbf{w}_3, \qquad (3.6)$$

dengan $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

Bukti. Vektor $\mathbf{w}_i$ merupakan hasil transformasi Afin dari $\mathbf{v}_i$ untuk $i = 1, 2, 3$, sedemikian sehingga $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{v}_1 + \mathbf{b}$, $\mathbf{w}_2 = A\mathbf{v}_2 + \mathbf{b}$, dan $\mathbf{w}_3 = A\mathbf{v}_3 + \mathbf{b}$. Karena

$\mathbf{w} = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$, dan $\mathbf{v}$ kombinasi cembung dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, maka

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= A(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3) + \mathbf{b}\\ &= k_1A\mathbf{v}_1 + k_2A\mathbf{v}_2 + k_3A\mathbf{v}_3 + \mathbf{b}(k_1 + k_2 + k_3)\\ &= k_1A\mathbf{v}_1 + k_1\mathbf{b} + k_2A\mathbf{v}_2 + k_2\mathbf{b} + k_3A\mathbf{v}_3 + k_3\mathbf{b}\\ &= k_1(A\mathbf{v}_1 + \mathbf{b}) + k_2(A\mathbf{v}_2 + \mathbf{b}) + k_3(A\mathbf{v}_3 + \mathbf{b})\\ &= k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + k_2\mathbf{w}_2.\end{aligned}$$

Jadi $\mathbf{w}$ juga merupakan kombinasi cembung dari $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ dan $\mathbf{w}_3$. □

4. Proses *Warp* pada Sebuah Segitiga

Misalkan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ merepresentasikan verteks pada segitiga awal dan $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ adalah verteks pada segitiga akhir. Berdasarkan penjelasan sebelumnya, terdapat sebuah transformasi Afin

$$\mathbf{w}_i = A\mathbf{v}_i + \mathbf{b}. \tag{4.1}$$

Subtitusikan persamaan (4.1) ke persamaan (3.6), maka diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= k_1(A\mathbf{v}_1 + \mathbf{b}) + k_2(A\mathbf{v}_2 + \mathbf{b}) + k_3(A\mathbf{v}_3 + \mathbf{b})\\ &= Ak_1\mathbf{v}_1 + k_1\mathbf{b} + Ak_2\mathbf{v}_2 + k_2\mathbf{b} + Ak_3\mathbf{v}_3 + k_3\mathbf{b}\\ &= A(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3) + (k_1 + k_2 + k_3)\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Untuk memperoleh A dan $\mathbf{b}$, konstruksi sistem persamaan dengan menggunakan verteks yang terdapat pada segitiga. Misalkan koordinat verteks $\mathbf{v}_i$ dan $\mathbf{w}_i$ diberikan oleh

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} w_{ix} \\ w_{iy} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Kemudian misalkan matriks A dan vektor $\mathbf{b}$ adalah

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}.$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.2) ke persamaan (4.1) untuk $i = 1, 2, 3$, diperoleh

$$\begin{aligned}w_{1x} &= a_{11}v_{1x} + a_{12}v_{1y} + b_x\\ w_{1y} &= a_{21}v_{1x} + a_{22}v_{1y} + b_y\\ w_{2x} &= a_{11}v_{2x} + a_{12}v_{2y} + b_x\\ w_{2y} &= a_{21}v_{2x} + a_{22}v_{2y} + b_y\\ w_{3x} &= a_{11}v_{3x} + a_{12}v_{3y} + b_x\\ w_{3y} &= a_{21}v_{3x} + a_{22}v_{3y} + b_y.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Sistem persamaan di atas dapat dibagi menjadi dua sistem persamaan:

$$\begin{aligned}w_{1x} &= a_{11}v_{1x} + a_{12}v_{1y} + b_x\\ w_{2x} &= a_{11}v_{2x} + a_{12}v_{2y} + b_x\\ w_{3x} &= a_{11}v_{3x} + a_{12}v_{3y} + b_x\end{aligned} \quad \text{dan} \quad \begin{aligned}w_{1y} &= a_{21}v_{1x} + a_{22}v_{1y} + b_y\\ w_{2y} &= a_{21}v_{2x} + a_{22}v_{2y} + b_y\\ w_{3y} &= a_{21}v_{3x} + a_{22}v_{3y} + b_y\end{aligned}.$$

Kedua sistem persamaan di atas dapat dibentuk ke dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} & 1 \\ v_{2x} & v_{2y} & 1 \\ v_{3x} & v_{3y} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1x} \\ w_{2x} \\ w_{3x} \end{pmatrix}$$

dan

$$\begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} & 1 \\ v_{2x} & v_{2y} & 1 \\ v_{3x} & v_{3y} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1y} \\ w_{2y} \\ w_{3y} \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa kedua sistem di atas mempunyai matriks koefisien yang sama dan matriks koefisien tersebut mempunyai invers, karena $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ merupakan vektor-vektor yang tak-segaris sehingga mempunyai determinan yang tidak sama dengan nol. Jadi solusi untuk a_1, a_2, a_3, a_4, b_x dan b_y diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} & 1 \\ v_{2x} & v_{2y} & 1 \\ v_{3x} & v_{3y} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w_{1x} \\ w_{2x} \\ w_{3x} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

dan

$$\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} & 1 \\ v_{2x} & v_{2y} & 1 \\ v_{3x} & v_{3y} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w_{1y} \\ w_{2y} \\ w_{3y} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Sekarang misalkan titik-titik yang termuat dalam sebuah segitiga, termasuk titik-titik pada sisi segitiga dan verteks segitiga, berjumlah r buah (titik-titik ini direpresentasikan oleh titik-titik pixel pada gambar). Dengan demikian terdapat $(r-3)$ buah titik pada segitiga awal selain verteks $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ dan $(r-3)$ buah titik pada segitiga akhir selain verteks $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$. Pada implementasinya nanti, suatu titik dapat dipastikan berada dalam sebuah segitiga jika titik tersebut merupakan kombinasi cembung dari verteks pada segitiga tersebut (lihat Teorema 3.1). Misalkan $\mathbf{p}_j = \begin{pmatrix} p_{jx} \\ p_{jy} \end{pmatrix}$ adalah titik yang berada pada segitiga awal selain verteks $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ dan $\mathbf{q}_j = \begin{pmatrix} q_{jx} \\ q_{jy} \end{pmatrix}$ adalah titik yang berada pada segitiga akhir selain $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$, dimana $j = 1, 2, \cdots, (r-3)$.

Perhatikan bahwa $\mathbf{p}_j$ merupakan kombinasi cembung dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Apabila $\mathbf{p}_j$ dan $\mathbf{q}_j$ memenuhi transformasi Afin

$$\begin{aligned} q_{jx} &= a_{11} p_{jx} + a_{12} p_{jy} + b_x, \\ q_{jy} &= a_{21} p_{jx} + a_{22} p_{jy} + b_y, \end{aligned} \tag{4.6}$$

untuk $j = 1, 2, \cdots, (r-3)$, maka menurut Teorema 3.4, titik $\mathbf{q}_j$ merupakan kombinasi cembung dari $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$. Dengan demikian, menurut Teorema 3.1, titik-titik $\mathbf{q}_j$ terletak di dalam segitiga yang dibentuk oleh verteks $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$.

Gabungan dari sistem persamaan (4.6) dengan sistem persamaan (4.5) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} w_{1x} & w_{2x} & w_{3x} & q_{jx} \\ w_{1y} & w_{2y} & w_{3y} & q_{jy} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_x \\ a_{21} & a_{22} & b_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{2x} & v_{3x} & p_{jx} \\ v_{1y} & v_{2y} & v_{3y} & p_{jy} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa berdasarkan Teorema 3.4, titik $\mathbf{q}$ merupakan kombinasi cembung dari $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$, dan $\mathbf{w}_3$. Akibatnya, $\mathbf{q}$ terletak di dalam segitiga yang menghubungkan verteks $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$, dan $\mathbf{w}_3$ (dijamin oleh Teorema 3.1). Berdasarkan penjelasan di atas, maka sebuah segitiga awal dapat di-*warp*-kan dengan melakukan transformasi Afin terhadap setiap titik dalam segitiga tersebut.

5. Contoh

Misalkan suatu transformasi Afin memetakan vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ berturut-turut ke vektor-vektor $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ dimana $\mathbf{v}_1 = (1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,3)$, $\mathbf{v}_3 = (2,1)$, $\mathbf{w}_1 = (4,3)$, $\mathbf{w}_2 = (9,5)$, dan $\mathbf{w}_3 = (5,3)$. Akan ditentukan matriks A dan vektor $\mathbf{b}$ yang memenuhi transformasi Afin dari $\mathbf{v}_i$ ke $\mathbf{w}_i$, $i = 1,2,3$. Kemudian jika diambil titik $\mathbf{p} = (2,2)$, akan diperiksa apakah titik tersebut berada pada segitiga yang menghubungkan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$ atau tidak. Jika ya, akan dicari titik $\mathbf{q}$ yang merupakan peta dari $\mathbf{p}$ dan terletak pada segitiga yang menghubungkan $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$, dan $\mathbf{w}_3$.

Perhatikan bahwa persamaan (4.4) dan (4.5) untuk nilai-nilai vektor $\mathbf{v}_i$ dan $\mathbf{w}_i$ pada contoh menjadi

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Jadi diperoleh $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$. Oleh karena itu matriks A dan vektor $\mathbf{b}$ yang memenuhi transformasi Afin tersebut adalah

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Kemudian untuk memeriksa apakah titik $\mathbf{p}$ berada di dalam segitiga dengan verteks $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$, maka perlu diperiksa terlebih dahulu apakah $\mathbf{p}$ merupakan kombinasi cembung dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$. Dalam hal ini akan dicari nilai k_1, k_2, dan k_3 yang tak-negatif sedemikian sehingga berlaku $\mathbf{p} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$ dan $k_{1+}k_2 + k_3 = 1$ atau dalam bentuk matriks dapat ditulis

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solusi untuk k_1, k_2, k_3 diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dari sistem di atas diperoleh $k_1 = 0, k_2 = 1/2$, dan $k_3 = 1/2$ yang bernilai tak-negatif. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\mathbf{p}$ merupakan kombinasi cembung dari $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$. Lebih lanjut, berdasarkan Teorema 3.4, $\mathbf{p}$ dijamin terletak di dalam segitiga yang menghubungkan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$. Kemudian posisi titik $\mathbf{q}$ yang merupakan hasil transformasi Afin dari $\mathbf{p}$ dapat ditentukan berdasarkan persamaan (4.7), yaitu

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & q_x \\ 3 & 5 & 3 & q_y \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jadi titik $\mathbf{q} = (7, 4)$.

6. Kesimpulan dan Saran

Adapun kesimpulan dari makalah ini dapat dijelaskan sebagai berikut.

(1) *Warp* pada sebuah segitiga dapat dihasilkan dengan menggunakan transformasi Afin yang memiliki sebuah matriks 2×2 yang dapat dibalik dan sebuah vektor berdimensi 2.
(2) Transformasi Afin akan memetakan kombinasi cembung dari vektor-vektor ke kombinasi cembung yang sama dari peta vektor-vektor tersebut.
(3) Setiap pixel yang terdapat pada segitiga yang dibatasi oleh 3 buah verteks yang saling dihubungkan merupakan kombinasi cembung dari ketiga verteks yang membentuk segitiga tersebut.
(4) Sebuah segitiga awal dapat di-*warp*-kan dengan melakukan transformasi Afin terhadap setiap titik dalam segitiga tersebut.

Saran untuk penelitian selanjutnya yaitu mengembangkan topik ini menjadi lebih menarik dengan menjadikan konsep *warp* pada sebuah segitiga sebagai dasar untuk proses *warp* pada sebuah gambar.

7. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Narwen, M.Si, Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si, dan Ibu Riri Lestari, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. dan C. Rorres. 2005. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi.* Edisi Delapan. Erlangga, Jakarta
[2] Ryan, P.J. 1992. *Euclidean and Non-Euclidean Geometry.* Cambridge University Press, New York