

PENYELESAIAN MASALAH PEMROGRAMAN LINIER BILANGAN BULAT MURNI DENGAN METODE REDUKSI VARIABEL

PESTI NOVTARIA, SUSILA BAHRI

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
pestinovtaria5@gmail.com, susilabahri@gmail.com*

Abstrak. Pemrograman linier bilangan bulat merupakan bagian dari pemrograman linier dimana semua atau beberapa variabel keputusan berupa bilangan bulat. Pemrograman linier bilangan bulat murni adalah salah satu bentuk dari pemrograman linier bilangan bulat. Dalam penelitian ini akan dibahas bagaimana menyelesaikan masalah pemrograman linier bilangan bulat murni dengan menggunakan metode reduksi variabel. Penyelesaian masalah pemrograman linier bilangan bulat murni dengan menggunakan metode reduksi variabel menghasilkan solusi optimal dengan semua variabel keputusan berupa bilangan bulat yang perhitungannya lebih mudah dan sederhana. Hal ini diperlihatkan melalui beberapa contoh yang diberikan.

Kata Kunci: Pemrograman linier, Pemrograman linier bilangan bulat, metode reduksi variabel, solusi optimal

1. Pendahuluan

Penerapan optimisasi dapat digunakan dalam semua cabang ilmu teknik dan sains. Pemrograman linier adalah bagian dari pemrograman matematika yang merupakan cabang dari optimisasi. Pemrograman linier adalah merencanakan kegiatan-kegiatan untuk memperoleh hasil yang optimal, yaitu suatu hasil untuk mencapai tujuan yang ditentukan dengan cara paling baik di antara semua alternatif yang mungkin [1]. Nilai variabel keputusan yang diinginkan pada masalah pemrograman linier dalam kehidupan sehari-hari adalah bilangan bulat. Oleh karena itu, masalah tersebut diselesaikan sebagai masalah pemrograman linier bilangan bulat [2].

Masalah pemrograman linier bilangan bulat dapat diselesaikan dengan metode *Cutting Plane* dan metode *Branch and Bound* [2]. Pada metode *Cutting Plane*, solusi bilangan bulat optimum dapat diperoleh dengan menggunakan metode Simpleks dan metode Dual Simpleks serta menambahkan ketaksamaan yang baru. Metode ini memiliki kelemahan, karena banyaknya kendala tambahan dan iterasi yang tidak dapat diprediksi. Sementara itu, pada metode *Branch and Bound* solusi bilangan bulatnya juga dapat diperoleh dengan metode Simpleks. Jika solusi bukan bilangan bulat, maka dilakukan pencabangan masalah menjadi dua sub masalah sehingga diperoleh solusi yang dibutuhkan. Metode ini memiliki kelemahan, karena banyaknya sub masalah dan iterasi juga tidak dapat diprediksi. Oleh karena itu, untuk mengatasi kelemahan dari kedua metode tersebut dalam menyelesaikan masalah

program linier bilangan bulat, digunakan suatu pendekatan baru yang dinamakan metode Reduksi Variabel [2].

Metode Reduksi Variabel adalah sebuah metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman linier bilangan bulat murni [2]. Metode ini lebih sederhana daripada metode *Cutting Plane* dan metode *Branch and Bound*. Adapun keuntungan dari metode Reduksi Variabel antara lain: tidak perlu menggunakan metode Simpleks dan/atau Dual Simpleks, tidak perlu menambahkan kendala baru dan /atau variabel baru, banyak sub masalah dapat diprediksi dan perhitungannya sangat sederhana dan mudah.

Dalam penelitian ini akan dibahas bagaimana menyelesaikan masalah pemrograman linier bilangan bulat murni berikut.

$$\text{Maksimumkan} \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \text{ adalah bilangan bulat,}$$

dengan menggunakan metode Reduksi Variabel.

2. Metode Reduksi Variabel

Pada penelitian ini akan dibahas permasalahan pemrograman linier bilangan bulat murni dua variabel pada kasus maksimisasi dengan metode reduksi variabel.

Pandang masalah pemrograman linier bilangan bulat murni (P2) berikut.

$$\text{Maksimumkan} \quad z = \sum_{j=1}^2 c_j x_j$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m,$$

dimana

$$x_j \geq 0 \text{ dan bilangan bulat, untuk } j = 1, 2,$$

$$c_j \geq 0, a_{ij} \geq 0 \text{ dan } b_i > 0, \forall i \text{ dan } j.$$

Nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_j pada masalah P2 yang dinotasikan dengan x_j° diberikan oleh [2]:

$$x_j^\circ = \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_i}{a_{ij}} \right\rfloor, i = 1, 2, \dots, m \right\}, \quad j = 1, 2$$

dengan $\lfloor k \rfloor$ menunjukkan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan k , dan $z(P2)$ menunjukkan nilai optimal dari z .

Selanjutnya diberikan masalah pemrograman linier (*EP2*) berikut.

Tentukan nilai z dan bilangan bulat terbesar dari x_1 dan x_2 sedemikian sehingga,

$$\text{Maksimumkan} \quad \left\{ z = \sum_{j=1}^2 c_j x_j; (x_1, x_2) \in P \text{ atau } Q \right\}$$

dimana

$$P = \left\{ (x_1, x_2); x_1 \in \{0, 1, 2, \dots, U\} \text{ dan } x_2 = \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_i - a_{i1}x_1}{a_{i2}} \right\rfloor, i = 1, 2, \dots, m \right\} \right\}$$

dengan U adalah nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_1 , yaitu x_1° dan

$$Q = \left\{ (x_1, x_2); x_2 \in \{0, 1, 2, \dots, V\} \text{ dan } x_1 = \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_i - a_{i2}x_2}{a_{i1}} \right\rfloor, i = 1, 2, \dots, m \right\} \right\}$$

dengan V adalah nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_2 , yaitu x_2° .

Solusi dari masalah *EP2* ditunjukkan dengan $z(EP2)$.

Relasi antara masalah *P2* dan *EP2* dinyatakan oleh teorema berikut.

Teorema 2.1. (x_1^*, x_2^*, z^*) adalah solusi dari masalah pada *P2* jika dan hanya jika (x_1^*, x_2^*, z^*) adalah solusi dari masalah *EP2*.

Bukti. Pembuktian teorema akan dilakukan melalui pembuktian dua arah yaitu:
 $(\Leftarrow)$ Misalkan (x_1^*, x_2^*, z^*) adalah solusi dari masalah *EP2*. Karena kendala masalah *EP2* sama dengan masalah *P2*, maka hal ini menyatakan bahwa (x_1^*, x_2^*) memenuhi semua kendala pada masalah *P2*. Karena fungsi yang ingin dicari adalah nilai maksimum pada masalah *EP2* sama dengan masalah *P2*, maka (x_1^*, x_2^*) juga memberikan nilai maksimum dari z yaitu z^* . Oleh karena itu, (x_1^*, x_2^*, z^*) adalah solusi dari masalah *P2*.

$(\Rightarrow)$ Misalkan (x_1^*, x_2^*, z^*) adalah solusi dari masalah *P2*, maka (x_1^*, x_2^*) memenuhi semua kendala dari masalah *P2*. Karena $x_1^* \in \{0, 1, 2, \dots, U\}$, dimana U adalah nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_1^* dan,

$$x_2^* = \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_i - a_{i1}x_1^*}{a_{i2}} \right\rfloor; i = 1, 2, \dots, m \right\},$$

atau karena $x_2^* \in \{0, 1, 2, \dots, V\}$, dimana V adalah nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin untuk x_2 dan,

$$x_1^* = \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_i - a_{i2}x_2^*}{a_{i1}} \right\rfloor; i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

maka (x_1^*, x_2^*) memberikan nilai maksimum dari z yaitu z^* . Jadi (x_1^*, x_2^*, z^*) adalah solusi dari masalah *EP2*. $\square$

3. Algoritma Metode Reduksi Variabel

Langkah-langkah yang dilakukan untuk memperoleh solusi bilangan bulat optimum dari masalah pemrograman linier bilangan bulat murni dua variabel dengan metode reduksi variabel adalah sebagai berikut.

- (1) Tentukan minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_1 dan x_2 yang ditunjukkan dengan x_1° dan x_2° . Nilai U berhubungan dengan x_1° dan V berhubungan dengan x_2° .
- (2) Selesaikan masalah $EP2$ yang merupakan masalah yang ekuivalen dengan masalah $P2$. Misalkan z^* , x_1^* dan x_2^* adalah solusi dari masalah $EP2$.
- (3) Berdasarkan Teorema 2.1, solusi masalah $P2$ adalah : $z(P2) = z^*$, $x_1 = x_1^*$ dan $x_2 = x_2^*$.

Dapat disimpulkan bahwa dalam metode reduksi variabel ini kita tidak menyelesaikan semua nilai variabel keputusan yang mungkin, tetapi cukup dengan memperhatikan nilai variabel keputusan

$$x_j^\circ = \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_i}{a_{ij}} \right\rfloor, i = 1, 2, \dots, m \right\}, j = 1, 2.$$

4. Masalah-masalah Pemrograman Linier Bilangan Bulat Murni dan Penyelesaiannya

Berikut diberikan contoh penerapan metode reduksi variabel dalam masalah pemrograman linier bilangan bulat murni.

Contoh 4.1. [5] Sebuah Perusahaan akan memutuskan membuat meja atau kursi. Untuk membuat satu meja membutuhkan waktu pengerjaan selama 1 jam dan kayu sebanyak 9 *board feet*. Sementara untuk membuat satu kursi membutuhkan waktu pengerjaan selama 1 jam dan kayu sebanyak 5 *board feet*. Waktu pengerjaan yang tersedia tidak lebih dari 6 jam dan kayu yang tersedia tidak lebih dari 45 *board feet*. Masing-masing meja menghasilkan keuntungan sebesar \$8 dan masing-masing kursi menghasilkan keuntungan \$5. Berapakah perusahaan tersebut harus membuat meja atau kursi agar mendapatkan keuntungan maksimum?

Solusi.

Definisikan:

x_1 adalah banyaknya meja yang akan dibuat,

x_2 adalah banyaknya kursi yang akan dibuat.

Secara matematis masalah tersebut dapat diformulasikan sebagai:

$$\text{Maksimumkan} \quad z = 8x_1 + 5x_2 \quad (4.1)$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6, \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45, \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ dan bilangan bulat.} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan algoritma reduksi variabel maka diperoleh:

- (1) Nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_1 adalah:

$$\begin{aligned} x_1^\circ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_1}{a_{11}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b_2}{a_{21}} \right\rfloor \right\}, \\ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{6}{1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{45}{9} \right\rfloor \right\}, \\ &= \min \{6, 5\}, \\ &= 5. \end{aligned}$$

Ini berarti bahwa $U = 5$.

Sedangkan nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_2 adalah:

$$\begin{aligned} x_2^\circ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_1}{a_{12}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b_2}{a_{22}} \right\rfloor \right\}, \\ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{6}{1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{45}{5} \right\rfloor \right\}, \\ &= \min \{6, 9\}, \\ &= 6. \end{aligned}$$

Ini berarti bahwa $V = 6$.

Dari hasil x_1° dan x_2° yang diperoleh, maka nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin adalah 5.

- (2) Karena nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar berhubungan dengan x_1 , maka solusi dari masalah (4.1) adalah

$$\begin{aligned} P &= \left\{ (x_1, x_2); x_1 \in \{0, 1, 2, \dots, U\} \text{ dan } x_2 = \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_1 - a_{11}x_1}{a_{12}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}} \right\rfloor \right\} \right\}, \\ &= \left\{ (x_1, x_2); x_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ dan } x_2 = \min \left\{ \left\lfloor \frac{6 - x_1}{1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{45 - 9x_1}{5} \right\rfloor \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Dari hasil yang telah diperoleh, maka calon solusi optimal adalah sebagai berikut.

- jika nilai $x_1 = 0, x_2 = 6$ maka $z = 8(0) + 5(6) = 30$,
- jika nilai $x_1 = 1, x_2 = 5$ maka $z = 8(1) + 5(5) = 33$,
- jika nilai $x_1 = 2, x_2 = 4$ maka $z = 8(2) + 5(4) = 36$,
- jika nilai $x_1 = 3, x_2 = 3$ maka $z = 8(3) + 5(3) = 39$,
- jika nilai $x_1 = 4, x_2 = 1$ maka $z = 8(4) + 5(1) = 37$,
- jika nilai $x_1 = 5, x_2 = 0$ maka $z = 8(5) + 5(0) = 40$.

- (3) Berdasarkan Teorema 2.1, maka solusi optimal tersebut juga merupakan solusi masalah (4.1).

Oleh karena itu, keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan adalah \$40 pada saat $x_1 = 5, x_2 = 0$ yang berarti perusahaan dapat membuat 5 meja dan tidak membuat kursi.

Contoh 4.2. Sebuah perusahaan menghasilkan 2 jenis produk A dan B . Dari hasil penjualan, produk A memberikan keuntungan \$8,5 sedangkan produk B memberikan keuntungan \$17. Masing-masing produk diproses dengan 2 mesin, yaitu

mesin 1 dan mesin 2. Produk A membutuhkan 3,5 jam waktu pemrosesan dengan menggunakan mesin 1 dan 1,6 jam waktu pemrosesan dengan menggunakan mesin 2. Sementara, produk B membutuhkan 10 jam waktu pemrosesan dengan menggunakan mesin 1 dan 2 jam waktu pemrosesan dengan menggunakan mesin 2. Selama hari kerja, mesin 1 tersedia tidak lebih dari 25 jam dan mesin 2 tersedia tidak lebih dari 16 jam. Berapakah perusahaan tersebut harus memproduksi produk A atau produk B agar perusahaan memperoleh keuntungan yang maksimum?

Solusi.

Definisikan:

x_1 adalah banyaknya produk A yang diproduksi,

x_2 adalah banyaknya produk B yang diproduksi.

Secara matematis masalah tersebut dapat diformulasikan sebagai:

$$\text{Maksimumkan} \quad z = \frac{17}{2}x_1 + 17x_2 \quad (4.2)$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}x_1 + 10x_2 &\leq 25, \\ \frac{8}{5}x_1 + 2x_2 &\leq 16, \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ dan bilangan bulat.} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan algoritma reduksi variabel maka diperoleh:

(1) Nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_1 adalah:

$$\begin{aligned} x_1^\circ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_1}{a_{11}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b_2}{a_{21}} \right\rfloor \right\}, \\ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{25}{\frac{7}{2}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{16}{\frac{8}{5}} \right\rfloor \right\}, \\ &= \min \{7, 10\}, \\ &= 7. \end{aligned}$$

Ini berarti bahwa $U = 7$.

Sedangkan nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_2 adalah :

$$\begin{aligned} x_2^\circ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_1}{a_{12}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b_2}{a_{22}} \right\rfloor \right\}, \\ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{25}{10} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{16}{2} \right\rfloor \right\}, \\ &= \min \{2, 8\}, \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ini berarti bahwa $V = 2$.

Dari hasil x_1° dan x_2° yang diperoleh, maka nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin adalah 2.

- (2) Karena nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar berhubungan dengan x_2 , maka solusi dari masalah (4.2) adalah

$$\begin{aligned} Q &= \left\{ (x_1, x_2); x_2 \in \{0, 1, 2, \dots, V\} \text{ dan } x_1 = \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b_2 - a_{22}x_2}{a_{21}} \right\rfloor \right\} \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2); x_2 \in \{0, 1, 2\} \text{ dan } x_1 = \min \left\{ \left\lfloor \frac{25 - 10x_2}{7} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{16 - 2x_2}{5} \right\rfloor \right\} \right\} \end{aligned}$$

Jadi dari hasil yang telah diperoleh, maka calon solusi optimal adalah sebagai berikut.

- jika nilai $x_1 = 7, x_2 = 0$ maka $z = \frac{17}{2}(7) + 17(0) = 59,5$,
 - jika nilai $x_1 = 4, x_2 = 1$ maka $z = \frac{17}{2}(4) + 17(1) = 51$,
 - jika nilai $x_1 = 1, x_2 = 2$ maka $z = \frac{17}{2}(1) + 17(2) = 42,5$.
- (3) Berdasarkan Teorema 2.1, maka solusi optimal tersebut juga merupakan solusi masalah (4.2). Oleh karena itu, nilai z maksimum yang diperoleh adalah \$59,5 pada saat $x_1 = 7, x_2 = 0$ yang berarti perusahaan dapat memproduksi produk A sebanyak 10 buah dan tidak memproduksi produk B.

Contoh 4.3.

$$\text{Maksimumkan} \quad z = 4x_1 + 5x_2 \quad (4.3)$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 10, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 11, \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 13, \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{ dan bilangan bulat.} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan algoritma reduksi variabel maka diperoleh:

- (1) Nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_1 adalah:

$$\begin{aligned} x_1^\circ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_1}{a_{11}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b_2}{a_{21}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b_3}{a_{31}} \right\rfloor \right\}, \\ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{11}{1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{13}{3} \right\rfloor \right\}, \\ &= \min \{3, 11, 4\}, \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ini berarti bahwa $U = 3$.

Sedangkan nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin dari x_2 adalah:

$$\begin{aligned} x_2^\circ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_1}{a_{12}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b_2}{a_{22}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b_3}{a_{32}} \right\rfloor \right\}, \\ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{11}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{13}{3} \right\rfloor \right\}, \\ &= \min \{5, 2, 4\}, \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ini berarti bahwa $V = 2$.

Dari hasil x_1° dan x_2° yang diperoleh, maka nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar yang mungkin adalah 2.

- (2) Karena nilai minimum dari nilai-nilai bilangan bulat terbesar berhubungan dengan x_2 , maka solusi dari masalah (4.3) adalah

$$\begin{aligned} Q &= \left\{ (x_1, x_2); x_2 \in \{0, 1, 2, \dots, V\} \text{ dan } x_1 = \min \left\{ \left\lfloor \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} \right\rfloor, \right. \right. \\ &\quad \left. \left\lfloor \frac{b_2 - a_{22}x_2}{a_{21}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b_3 - a_{32}x_2}{a_{31}} \right\rfloor \right\} \right\}, \\ &= \left\{ (x_1, x_2); x_2 \in \{0, 1, 2\} \text{ dan } x_1 = \min \left\{ \left\lfloor \frac{10 - 2x_2}{3} \right\rfloor, \right. \right. \\ &\quad \left. \left\lfloor \frac{11 - 4x_2}{1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{10 - 3x_2}{3} \right\rfloor \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Jadi dari hasil yang telah diperoleh maka calon solusi optimal adalah sebagai berikut.

- jika nilai $x_1 = 3, x_2 = 0$ maka $z = 4(3) + 5(0) = 12$,
 - jika nilai $x_1 = 2, x_2 = 1$ maka $z = 4(2) + 5(1) = 13$,
 - jika nilai $x_1 = 2, x_2 = 2$ maka $z = 4(2) + 5(2) = 18$.
- (3) Berdasarkan Teorema 2.1, maka solusi optimal tersebut juga merupakan solusi pada masalah (4.3). Oleh karena itu, nilai z maksimum yang diperoleh adalah 18 pada saat $x_1 = 2, x_2 = 2$.

5. Penutup

Dalam penelitian ini dibahas masalah pemrograman linier bilangan bulat murni untuk dua variabel dengan menggunakan metode reduksi variabel. Metode reduksi variabel menghasilkan solusi optimal dengan variabel keputusannya berupa bilangan bulat murni yang perhitungannya lebih mudah dan sederhana. Penggunaan metode ini diperlihatkan dari tiga buah contoh yang diberikan.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Arrival Rince Putri, M.T, M.Si, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Bapak Efendi M.Si dan Bapak Bukti Ginting, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Hiller, Frederick. S dan Gerald Lieberman. 1995. *Introduction to Operations Research*, Sixth Edition. McGraw-Hill, California
- [2] Pandian, P dan M. Jayalakshmi. 2012. A New Approach for solving a Class of Pure Integer Linear Programming Problems. *Journal of Advanced Engineering Technology Vol. III: 248 – 251*

- [3] Purcel, Edwin J, Dale Varberg dan Steven E. Rigdon. 2003. *Kalkulus*, Edisi Kedelapan. Erlangga, Jakarta.
- [4] Sinha, S. M. 2006. *Mathematical Programming: Theory and Method, First Edition*. Rajkamal Electric Press, Delhi.
- [5] Winston. W. L. 2004. *Operation Research: Applications and Algorithms, Fourth Edition*. Brooks/Cole-Thomson Learning, Ottawa.