Jurnal Matematika UNAND
Vol. **3** No. **3** Hal. 34 – 40
ISSN : 2303–291X

PENYARINGAN TERURUT IMPLIKATIF POSITIF DARI SEMIGRUP IMPLIKATIF

RIDHO IKHRAMUL FITRA
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
ridhoifia5@gmail.com

Abstrak. Semigrup implikatif merupakan suatu himpunan tertentu dari suatu semigrup dengan operasi terurut parsial dan dua buah operasi biner berbeda, serta memenuhi sifat-sifat tertentu. Beberapa jenis semigrup implikatif adalah penyaringan terurut, penyaringan terurut implikatif, dan penyaringan terurut implikatif positif. Setiap penyaringan terurut implikatif positif merupakan penyaringan terurut dan terurut implikatif.

Kata Kunci: Semigrup implikatif, penyaringan terurut, penyaringan terurut implikatif (positif)

1. Pendahuluan

Semilattice implikatif merupakan struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan tiga operasi, yaitu operasi terurut parsial, konjungsi, dan implikatif. Lebih rincinya, *semilattice* implikatif merupakan suatu sistem $(A, \preceq, \wedge, *)$, dimana A merupakan himpunan tak kosong, $\preceq$ merupakan terurut parsial di A, $\wedge$ merupakan konjungsi dan $*$ merupakan operasi biner di A, dimana untuk setiap elemen x, y, z di A berlaku $z \preceq x * y$ jika dan hanya jika $z \wedge x \preceq y$.

Semilattice implikatif telah dibahas oleh Nemitz [7] dan Blyth [1]. Kemudian Nemitz mengembangkan teori *semilattice* implikatif pada penyaringan terurut. Chan dan Shum [2] menetapkan beberapa sifat dasar dan membentuk struktur penyaringan terurut dari semigrup implikatif, lalu Chan dan Shum mengadopsi ide dari Nemitz dengan memperkenalkan istilah terurut parsial secara negatif semigrup implikatif.

Terurut parsial secara negatif semigrup implikatif merupakan himpunan bagian tertentu dari suatu semigrup dengan operasi terurut parsial dan dua buah operasi biner berbeda, serta memenuhi sifat-sifat tertentu. Untuk mengkaji lebih dalam tentang terurut parsial secara negatif semigrup implikatif, maka Jun, Meng dan Xin [6] memberikan beberapa teori tentang penyaringan terurut dari semigrup implikatif. Kemudian Jun dan Kim [5] menghasilkan teori-teori tentang penyaringan terurut implikatif positif dari semigrup implikatif. Di dalam tulisan ini, penulis akan mengkaji tentang sifat-sifat penyaringan terurut implikatif positif dari semigrup implikatif.

Berikut adalah beberapa definisi yang terkait dengan semigrup implikatif.

Definisi 1.1. [5] *Semigrup terurut parsial secara negatif adalah suatu himpunan A yang padanya terdefinisi terurut parsial "$\preceq$" dan terdapat suatu operasi biner "$\bullet$" pada A sedemikian sehingga untuk semua $x, y, z \in A$ berlaku:*

(1) $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$,
(2) Jika $x \preceq y$ *maka* $x \bullet z \preceq y \bullet z$ *dan* $z \bullet x \preceq z \bullet y$,
(3) $x \bullet y \preceq x$ *dan* $x \bullet y \preceq y$.

Definisi 1.2. [5] *Semigrup terurut parsial secara negatif $(A, \preceq, \bullet)$ dikatakan implikatif, jika terdapat operasi biner $* : A \times A \to A$, sehingga untuk setiap $x, y, z \in A$ berlaku $z \preceq x * y$ jika dan hanya jika $z \bullet x \preceq y$.*

Untuk penyederhanaan istilah, semigrup implikatif terurut parsial secara negatif disebut sebagai semigrup implikatif saja.

Definisi 1.3. [5] *Suatu semigrup implikatif $(A, \preceq, \bullet, *)$ dikatakan komutatif jika memenuhi $x \bullet y = y \bullet x$ untuk setiap $x, y \in A$. Ini artinya $(A, \bullet)$ adalah semigrup komutatif.*

Proposisi 1.4. [2] *Misalkan A suatu semigrup implikatif, maka untuk setiap $x, y, z \in A$, berlaku:*

(1) $x \preceq 1$, *dimana* $x * x = 1, x = 1 * x$,
(2) $x \preceq y * (x \bullet y)$,
(3) $x \preceq x * x^2$,
(4) $x \preceq y * x$,
(5) Jika $x \preceq y$ *maka* $x * z \succeq y * z$ *dan* $z * x \preceq z * y$,
(6) $x \preceq y$ *jika dan hanya jika* $x * y = 1$,
(7) $x * (y * z) = (x \bullet y) * z$,
(8) Jika A merupakan komutatif maka $x * y \preceq (a \bullet x) * (a \bullet y)$ *untuk setiap* $a \in A$.

Proposisi 1.5. [5] *Jika A suatu semigrup implikatif komutatif, maka untuk setiap $x, y, z \in A$, berlaku:*

(1) $x * (y * z) = y * (x * z)$,
(2) $x \preceq (x * y) * y$,
(3) $y * z \preceq (z * x) * (y * x)$,
(4) $y * z \preceq (x * y) * (x * z)$,
(5) $((x * y) * y) * y = x * y$.

2. Penyaringan Terurut dan Terurut implikatif dari Semigrup Implikatif

Definisi 2.1. [2] *Misalkan A suatu semigrup implikatif dan F suatu himpunan bagian tak kosong pada A. Maka F disebut penyaringan terurut dari A jika:*

(F1) $x \bullet y \in F$ *untuk setiap* $x, y \in F$. *Ini artinya, F suatu subsemigrup dari A,*
(F2) Jika $x \in F$ *dan* $x \preceq y$, *maka* $y \in F$.

Proposisi 2.2. [*6*] *Misalkan A suatu semigrup implikatif dan F suatu himpunan bagian tak kosong pada A. Maka F merupakan penyaringan terurut pada A jika dan hanya jika berlaku:*

(F3) $1 \in F$,
(F4) *Jika* $x * y \in F$ *dan* $x \in F$, *maka* $y \in F$.

Bukti. Misal F merupakan penyaringan terurut dari A. Akan ditunjukkan (F3) dan (F4). Berdasarkan Proposisi 1.4 (1), maka $x \preceq 1\ \forall x \in A$, akibatnya $1 \in F$ (F2). Selanjutnya diketahui bahwa $x*y \preceq x*y$ (sifat refleksi), maka $(x*y)\bullet x \preceq y$. Karena $x * y \in F$ dan $x \in F$ maka $y \in F$ (F2). Sebaliknya, akan ditunjukkan F merupakan penyaringan terurut dari A.

Sebaliknya, misal F memenuhi (F3) dan (F4). Jika $x \in F$ dan $x \preceq y$, maka $x * y = 1$ (Proposisi 1.4 (6)). Akibatnya $y \in F$ (karena F memenuhi (F3) dan (F4)). Selanjutnya, misal $x, y \in F$ maka $x \preceq y*(x\bullet y)$ (Proposisi 1.4(2)), akibatnya $y * (x \bullet y) \in F$ (karena F memenuhi (F3) dan (F4)). Karena $y * (x \bullet y) \in F$ dan $y \in F$, maka $x \bullet y \in F$. Dengan demikian F merupakan suatu penyaringan terurut dari A. □

Lema 2.3. [*4*] *Misalkan A suatu semigrup implikatif dan F suatu himpunan bagian tak kosong pada A. Himpunan F merupakan penyaringan terurut dari A jika dan hanya jika berlaku:*

(F5) *Jika* $x \preceq y * z$, *maka* $z \in F$ *untuk setiap* $x, y \in F$ *dan* $z \in A$.

Bukti. Misal F penyaringan terurut dari A. Akan ditunjukkan $z \in F$. Misal $x \preceq y*z$ untuk setiap $x, y \in F$ dan $z \in A$. Karena $x \preceq y*z$ maka $x\bullet y \preceq z$ (Definisi 1.2) dan karena $x, y \in F$ dan F merupakan penyaringan terurut dari A maka $x \bullet y \in F$ (F1) sehingga $z \in F$ (F2). Sebaliknya, Misalkan berlaku (F5). Akan ditunjukkan F merupakan penyaringan terurut dari A. Karena $F \subseteq A$ dan $x, y \in F$ maka $x\bullet y \in F$ (F1). Selanjutnya misalkan $x \preceq y*z$ maka $x\bullet y \preceq z$ (Definisi 1.2). Karena $x\bullet y \in F$ dan $x \bullet y \preceq z$ maka $z \in F$ (F2). Akibatnya F merupakan penyaringan terurut dari A. □

Definisi 2.4. [*4*] *Misalkan A suatu semigrup implikatif dan F suatu himpunan bagian tak kosong pada A. Himpunan F dikatakan penyaringan terurut implikatif dari A jika memenuhi:*

(F3) $1 \in F$,
(F6) *Jika* $x * (y * z) \in F$ *dan* $x * y \in F$, *maka* $x * z \in F$ *untuk setiap* $x, y, z \in A$.

Lema 2.5. [*4*] *Misalkan A suatu semigrup implikatif. Jika F merupakan penyaringan terurut implikatif dari A, maka berlaku:*

(F7) *Jika* $x * (x * y) \in F$, *maka* $x * y \in F$ *untuk setiap* $x, y \in A$.

Bukti. Misalkan F merupakan penyaringan terurut implikatif dari A. Akan ditunjukkan $x*y \in F$. Misalkan $x*(x*y) \in F$. Karena $1 = x*x \in F$ dan $x*(x*y) \in F$ maka diperoleh $x * y \in F$ (F6). □

Lema 2.6. [4] *Misalkan A suatu semigrup implikatif. Maka setiap penyaringan terurut implikatif dari A merupakan penyaringan terurut dari A.*

Bukti. Misalkan F merupakan penyaringan terurut implikatif dari A. Akan ditunjukkan F merupakan penyaringan terurut dari A. Misalkan $x * y \in F$ dan $x \in F$. Akan ditunjukkan $y \in F$. Perhatikan bahwa $1*(x*y) \in F$ dan $x = 1*x \in F$ (Proposisi 1.4(1)). Maka $1 * y = y \in F$ (F6). Oleh karena itu, F merupakan penyaringan terurut dari A. □

3. Penyaringan Terurut Implikatif Positif dari Semigrup Implikatif

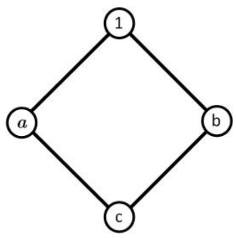
Definisi 3.1. [3] *Misalkan A suatu semigrup implikatif dan F merupakan himpunan bagian tak kosong pada A. Himpunan F dikatakan penyaringan terurut implikatif positif dari A jika memenuhi:*

(F3) $1 \in F$,
(F8) Jika $x * ((y * z) * y) \in F$ *dan* $x \in F$, *maka* $y \in F$ *untuk setiap* $x, y, z \in A$.

Contoh 3.2. Misalkan $A = \{\{p, q\}, \{p\}, \{q\}, \emptyset\}$ yang dilambangkan dengan $A = \{1, a, b, c\}$ dan didefinisikan operasi terurut parsial $\preceq$ di A (yang berarti $\subseteq$) sebagai berikut.

(1) $c \preceq a \preceq 1$.
(2) $c \preceq b \preceq 1$.

Definisi relasi terurut parsial $\preceq$ di atas, dapat juga disajikan dengan diagram Hasse sebagaimana yang diperlihatkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Hasse

Berdasarkan Tabel 1 dan Tabel 2, dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $A = \{1, a, b, c\}$ merupakan semigrup implikatif komutatif dan $F = \{1, a, b\}$ merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari semigrup implikatif.

Teorema 3.3. [3] *Misalkan A merupakan semigrup implikatif. Maka setiap penyaringan terurut implikatif positif dari A merupakan penyaringan terurut dari A.*

Bukti. Misal F merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari A. Akan ditunjukkan F merupakan penyaringan terurut dari A. Misalkan $x * y \in F$ dan

$\bullet$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	a	c	c
b	b	c	b	c
c	c	c	c	c

Tabel 1. Definisi operasi " $\bullet$ " di A.

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	b	b
b	1	a	1	a
c	1	1	1	1

Tabel 2. Definisi operasi " $*$ " di A.

$x \in F$ (F4), maka $x * y = x * ((y * y) * y)$ (Proposisi 1.4(1)) dan $x \in F$. Akibatnya $y \in F$ (F8), sehingga F merupakan penyaringan terurut dari A. □

Teorema 3.4. [3] *Misalkan A suatu semigrup implikatif komutatif. Maka setiap penyaringan terurut implikatif positif dari A merupakan penyaringan terurut implikatif dari A.*

Bukti. Misalkan F merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari A. Akan ditunjukkan F merupakan penyaringan terurut implikatif dari A. Misalkan $x * (y * z) \in F$ dan $x * y \in F$. Perhatikan bahwa

$$\begin{array}{rcll} x * (y * z) & = & y * (x * z) & \text{(Proposisi 1.5(1))} \\ & \preceq & (x * y) * (x * (x * z)) & \text{(Proposisi 1.5(4))}. \end{array}$$

Karena F penyaringan terurut dari A (Teorema 3.3, maka $x * (x * z) \in F$ (Lema 2.3). Kemudian,

$$\begin{array}{rcll} x * (x * z) & = & x * (((x * z) * z) * z) & \text{(Proposisi 1.5(5))} \\ & = & ((x * z) * z) * (x * z) & \text{(Proposisi 1.5(1))}. \end{array}$$

Akibatnya $1 * (((x * z) * z) * (x * z)) \in F$, sehingga $x * z \in F$ (F8). Dengan demikian F merupakan penyaringan terurut implikatif dari A. □

Teorema 3.5. [3] *Misalkan A suatu semigrup implikatif dan F merupakan penyaringan terurut dari A. Himpunan F merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari A jika dan hanya jika berlaku:*

(F9) Jika $(x * y) * y \in F$, maka $x \in F$ untuk setiap $x, y \in A$.

Bukti. Misalkan F merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari A. Akan ditunjukkan $x \in F$ untuk setiap $x, y \in A$. Misalkan $(x * y) * x \in F$ untuk setiap

$x, y \in A$. Maka $1 * ((x * y) * x) \in F$ (Proposisi 1.4(1)). Akibatnya $x \in F$ (F8). Sebaliknya, misalkan berlaku (F9). Akan ditunjukkan F merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari A. Misalkan $x * ((y * z) * y) \in F$ dan $x \in F$ untuk setiap $x, y \in A$. Maka $(y * z) * y \in F$ (F4), akibatnya $y \in F$ (karena (F9)). Oleh karena itu F merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari A. □

Teorema 3.6. [3] *Misalkan A suatu semigrup implikatif komutatif. Jika F merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari A, maka berlaku:*

(P1) Jika $(x * y) * y \in F$, maka $(y * x) * x \in F$ untuk setiap $x, y \in A$.

Bukti. Misalkan F merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari A. Akan ditunjukkan $(y * x) * x \in F$. Misalkan $(x * y) * y \in F$ untuk setiap $x, y \in A$. Karena $x \preceq (y * x) * x$ (Proposisi 1.4(4)), kemudian berdasarkan Proposisi 1.4(5) diperoleh

$$((y * x) * x) * y \preceq x * y \tag{3.1}$$

Kemudian, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
(x * y) * y &\preceq (y * x) * ((x * y) * x) && \text{(Proposisi 1.5(3))} \\
&= (x * y) * ((y * x) * x) && \text{(Proposisi 1.5(1))} \\
&\preceq (((y * x) * x) * y) * ((y * x) * x) && \text{(Proposisi 1.5(5))}.
\end{aligned}$$

Dari (F2) diperoleh $(((y * x) * x) * y) * ((y * x) * x) \in F$ dan dari Proposisi 1.5(1) diperoleh $1 * ((((y * x) * x) * y) * ((y * x) * x)) \in F$, sehingga $(y * x) * x \in F$ (F8).□

Teorema 3.7. [3] *Misalkan A semigrup implikatif komutatif dan F merupakan penyaringan terurut implikatif dari A yang memenuhi (P1). Maka F merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari A.*

Bukti. Misalkan F merupakan penyaringan terurut implikatif dari A yang memuat (P1). Akan ditunjukkan F merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari A. Misalkan $x*((y*z)*y) \in F$ dan $x \in F$. Akan ditunjukkan $y \in F$. Perhatikan bahwa jika $x*((y*z)*y) \in F$ dan $x*(y*z) \in F$ (karena F penyaringan terurut implikatif), maka $x * y \in F$ (F6). Kemudian, karena F memenuhi (P1) maka $(x * y) * y \in F$ dan $x * y \in F$. Sehingga $y \in F$ (F4). Dengan demikian F merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari A. □

Akibat 3.8. [3] *Misalkan A merupakan semigrup implikatif komutatif dan F merupakan penyaringan terurut implikatif dari A, maka F merupakan penyaringan terurut implikatif positif dari A jika dan hanya jika berlaku (P1).*

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Admi Nazra, Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si, Ibu Dr. Yanita, Bapak Prof. Dr. I Made Arnawa, dan Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Blyth, T. S. 1965. *Pseudo-residual in Semigroups.* London Mathematical Society, England
[2] M. W. Chan dan K. P. Shum. 1993. *Homomorphism of Implicative Semigroups.* Semigroup Forum
[3] Connel. 2002. *Elements of Abstract and Linear Algebra.* Department of Mathematics. University of Miami, America
[4] Y. B. Jun. 1999. *Implicative Ordered Filters of Implicative Semigroups.* Korean Mathematical Society, Korea
[5] Y. B. Jun dan K. H. Kim. 1999. *Positive Implicative Ordered Filters of Implicative Semigroups.* Korean Mathematical Society, Korea
[6] Y. B. Jun, J. Meng, dan X. L Xin. 1997. *On Ordered Filters of Implicative Semigroups.* Korean Mathematical Society, Korea
[7] Nemitz, W. C. 1995. *Implicative Semi-lattice.* American Mathematical Society, America