

ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI LINIER BERGANDA DENGAN TEKNIK *BOOTSTRAP*

DWI ANNISA FITRI

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
dwiannisafitri92@gmail.com*

Abstrak. Dalam mengestimasi parameter model regresi linear berganda, salah satu metode pengestimasi parameter yang biasa dipakai adalah metode kuadrat terkecil. Metode kuadrat terkecil digunakan untuk mengestimasi parameter yang nilainya tidak diketahui. Setelah parameter diestimasi dengan metode kuadrat terkecil, selanjutnya akan dilakukan estimasi dengan menggunakan metode *bootstrap* pasangan data. Dalam hal ini akan dilihat apakah hasil estimasi parameter model regresi linear berganda sudah cukup dekat dengan estimasi parameter model menggunakan metode *bootstrap* pasangan data. Kemudian akan dilihat juga apakah estimasi model parameter dengan menggunakan metode kuadrat terkecil sudah berada di dalam selang kepercayaan *bootstrap*, yaitu selang kepercayaan normal *bootstrap* dan selang kepercayaan persentil *bootstrap*.

Kata Kunci: Regresi linear berganda, metode kuadrat terkecil, bootstrap, selang kepercayaan normal, persentil

1. Pendahuluan

Analisis regresi merupakan analisis statistika yang digunakan untuk mengestimasi suatu parameter yang nilainya tidak diketahui. Biasanya untuk mengestimasi parameter tersebut digunakan suatu metode pendugaan parameter. Adapun metode pendugaan parameter yang umum dipakai dalam bidang statistika, yakni metode kuadrat terkecil (MKT). MKT tersebut akan menghasilkan nilai dugaan parameter yang baik jika memenuhi syarat-syarat sebagai penduga parameter yang baik, yaitu harus bersifat BLUE (*Best Linier Unbiased Estimator*). Sifat-sifat BLUE tersebut adalah penduga tak bias dan varian minimum [6].

Dalam metode *bootstrap* digunakan dua jenis metode, yaitu *bootstrap* pasangan data dan *bootstrap* residual. Metode *bootstrap* pasangan data merupakan suatu metode estimasi *parameter* yang diperoleh dengan cara menggandengkan antara variabel bebas dengan variabel respon dari data. Sedangkan metode *bootstrap* residual merupakan suatu metode estimasi parameter yang diperoleh dengan cara melakukan *resampling* pada nilai residu atau standar *error*. Dalam pembahasan skripsi kali ini akan lebih difokuskan kepada *bootstrap* pasangan data. Penggunaan metode *bootstrap* pasangan data dipilih karena metode *bootstrap* pasangan data lebih fleksibel dibandingkan metode *bootstrap* residual [1].

Prinsip metode *bootstrap* yaitu melakukan penyampelan data populasi melalui data sampel dengan mengambil sebanyak m sampel dari n data yang ada dengan

pengembalian, kemudian melakukan replikasi *bootstrap* sebanyak B kali dengan teknik pengembalian. Dari beberapa replikasi *bootstrap* tersebut dapat ditentukan selang kepercayaan untuk setiap parameter model. Akan dibandingkan nilai estimasi model parameter hasil MKT dengan nilai estimasi model parameter *bootstrap* dan selang kepercayaan *bootstrap*. Pada skripsi ini akan ditentukan selang kepercayaan normal dan selang kepercayaan persentil yang keduanya dihasilkan dari selang kepercayaan *bootstrap*.

2. Analisis Regresi Linear Berganda

Analisis regresi adalah teknik analisis statistika yang mencirikan hubungan antara dua atau lebih variabel untuk prediksi dan estimasi model matematika yang disebut model regresi [4]. Model regresi linear berganda terdiri dari satu variabel respon (Y) dan beberapa variabel bebas (X). Berikut adalah bentuk umum model regresi linear berganda berdasarkan [2].

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + \varepsilon,$$

dengan Y adalah variabel respon, X adalah variabel bebas, β_0 adalah koefisien regresi atau disebut juga dengan *Intercept* dan β_j adalah koefisien regresi untuk variabel bebas atau disebut juga dengan *slope*, untuk $j = 1, 2, \dots, k$ dengan k adalah jumlah variabel bebas, serta ε adalah nilai *error* dari model regresi.

3. Pendugaan Parameter dalam Regresi Linear

Dalam bidang statistika biasanya dipakai suatu metode yang umum dalam pendugaan parameter regresi, yaitu metode kuadrat terkecil. Metode kuadrat terkecil pertama kali diperkenalkan oleh Gauss-Markov pada tahun 1822. Gauss-Markov mengatakan bahwa metode kuadrat terkecil dapat digunakan untuk mengestimasi parameter regresi dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat *error*. Setelah meminimumkan jumlah kuadrat *error* akan diperoleh nilai koefisien dari parameter regresi. Parameter yang akan diestimasi pada penulisan kali ini yaitu parameter regresi linear berganda. Adapun bentuk umum jumlah kuadrat *error* dari regresi linear berganda [2], yaitu

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij})^2,$$

dengan k adalah banyak variabel bebas.

Setelah jumlah kuadrat diatas diminimumkan, akan diperoleh persamaan normal sebagai berikut.

$$\hat{\underline{\beta}} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{Y}.$$

4. Metode *Bootstrap*

Metode *bootstrap* pertama kali diperkenalkan oleh Freeman pada tahun 1979. Freeman menjelaskan dasar asumsi *bootstrap* yaitu *bootstrap to your own data*, yang artinya bergantunglah pada datamu sendiri.

Metode *bootstrap* menggunakan data asli sebagai sampel *bootstrap*. Data asli ini berasal dari data populasi, kemudian dari populasi ini akan dilakukan penyampelan data. Hasil penyampelan data inilah yang nantinya akan digunakan sebagai sampel *bootstrap*. Sampel *bootstrap* inilah yang akan digunakan sebagai solusi dalam menyelesaikan statistika inferensia.

Metode *bootstrap* terdiri dari dua jenis, yaitu metode *bootstrap* pasangan data dan metode *bootstrap* residual. Dalam penulisan kali ini akan digunakan metode *bootstrap* pasangan data. Metode *bootstrap* pasangan data dalam mengestimasi parameter regresi dilakukan dengan cara menggandengkan antara variabel bebas dengan variabel responnya. Setelah itu dilakukan replikasi *bootstrap* sebanyak B kali dengan teknik pengembalian. Setelah proses replikasi selesai dihitung nilai tengah dan ragam masing-masing parameter regresi. Untuk melihat tingkat keakurasian metode ini digunakan pendugaan selang kepercayaan normal dan persentil.

Adapun algoritma metode *bootstrap* pasangan data, yaitu:

- (1) Mengkonstruksi sampel dari data berpasangan (Y_i, X_i) dengan $i = 1, 2, \dots, n$ secara acak dengan peluang $1/n$. Data yang diperoleh merupakan data asli yang berasal dari populasi.
- (2) Misalkan data hasil pengacakan tersebut dinyatakan dalam (Y^*, X^*) , sehingga didapat model regresi $Y^* = X^* \beta + \varepsilon$.
- (3) Berdasarkan model tersebut akan dihitung estimasi parameter β , yakni dengan nilai estimasi parameter β_0^* dan β_j^* , dengan $j = 1, 2, \dots, n$.
- (4) Agar menghasilkan estimasi parameter yang lebih baik atau mendekati nilai sebenarnya, ulangi langkah-langkah sebelumnya sebanyak B kali.

Pendekatan *bootstrap* jika diulang lebih dari satu kali akan memberikan hasil yang berbeda. Perbedaan hasil ini disebabkan oleh simulasi yang dilakukan. Jika dapat dilakukan dengan menggunakan semua kemungkinan sampel, yaitu n^n maka hasilnya akan sama.

5. Asumsi Dasar *Bootstrap*

Asumsi dasar dalam melakukan pendugaan parameter dengan metode *bootstrap* yaitu melakukan pensampelan dengan pengembalian terhadap data asli. Prinsip metode *bootstrap* yaitu melakukan pengambilan data sampel berdasarkan data populasi. Langkah pengambilan data sampel dari data populasi yaitu dengan mengambil sebanyak m sampel yang berasal dari n populasi. Setelah diperoleh sampel yang dianggap cukup mewakili populasi, dilakukan proses *resampling* atau penyampelan *bootstrap* dengan teknik pengembalian. Sampel yang digunakan pada metode *bootstrap* berdistribusi empiris dengan peluang terambilnya masing-masing sampel dari populasi sebesar $1/n$. Artinya peluang terambilnya setiap sampel secara acak dari populasi memiliki kemungkinan yang sama.

6. Estimasi Selang Kepercayaan Normal dan Persentil Metode *Bootstrap*

Setelah dihasilkan B buah hasil estimasi parameter model dari simulasi *bootstrap*, selanjutnya akan dilakukan pendugaan selang kepercayaan. Selang kepercayaan yang digunakan dalam skripsi ini adalah selang kepercayaan normal dan persentil. Untuk selang kepercayaan *bootstrap* dengan pendekatan normal bagi $100(1 - \alpha)$ untuk β_k diberikan oleh [5].

$$\hat{\beta}_k - Z_{\alpha/2} se_B(\hat{\beta}_k^*) < \hat{\beta}_k < \hat{\beta}_k + Z_{\alpha} se_B(\hat{\beta}_k^*).$$

dengan $\hat{\beta}_k$ merupakan nilai tengah hasil estimasi dengan metode *bootstrap*, $Z_{\alpha/2}$ adalah nilai z tabel, $se_B(\hat{\beta}_k^*)$ adalah nilai standar *error* hasil estimasi dengan metode *bootstrap* dan $\hat{se}_B(\hat{\beta}_k^*) = (\sum_{b=1}^B \frac{[\hat{\varepsilon}^*(b) - \hat{\varepsilon}^*(.)]^2}{B-1})^{1/2}$.

Sedangkan untuk selang kepercayaan *bootstrap* persentil didasarkan pada distribusi estimator *bootstrap* [5]. Dibentuk distribusi empiris \hat{F}^* untuk setiap k bagi $\hat{\beta}_k^{*1}, \hat{\beta}_k^{*2}, \dots, \hat{\beta}_k^{*B}$. Berdasarkan distribusi ini dapat dihitung nilai persentil yang akan digunakan untuk estimasi selang kepercayaan *bootstrap* persentil. Selang kepercayaan *bootstrap* persentil bagi $100(1 - \alpha)$ untuk β_k adalah

$$(\hat{F}^*)^{-1}(\alpha/2), (\hat{F}^*)^{-1}(1 - \alpha/2),$$

dengan $(\hat{F}^*)^{-1}(\alpha/2)$ adalah persentil ke $100(\alpha/2)$ dan $(\hat{F}^*)^{-1}(1 - \alpha/2)$ merupakan persentil ke $100(1 - \alpha/2)$ dari distribusi \hat{F}^* .

7. Estimasi Model Parameter dengan Metode Kuadrat Terkecil (MKT)

Pada tahap ini akan dilakukan estimasi terhadap model parameter dengan menggunakan metode kuadrat terkecil terhadap data simulasi yang menganalisis hubungan antara variabel bebas, yaitu minat belajar mahasiswa (X_1), frekuensi belajar mahasiswa (X_2), frekuensi kehadiran dalam kelas (X_3), kunjungan ke perpustakaan (X_4), nilai UTS mahasiswa (X_5), terhadap variabel responnya, yaitu nilai UAS mahasiswa (Y) dengan jumlah sampel yang tersedia pada data ini yaitu sebanyak 50 buah. Berikut disajikan hasil estimasi yang diperoleh dengan menggunakan program *R*.

Berikut adalah hasil estimasi parameter dengan metode kuadrat terkecil.

Parameter	Nilai Estimasi	<i>p-value</i>
<i>Intercept</i>	-7.7052	0.80997
X_1	3.5142	0.00406
X_2	1.3871	0.0732
X_3	0.2447	0.46549
X_4	7.1326	0.05
X_5	0.2871	0.03985

Tabel 1. Hasil estimasi parameter dengan metode kuadrat terkecil

Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa terdapat variabel yang tidak signifikan yaitu X_2 dan X_3 , dengan nilai p -value masing-masing variabel yang besar dari 0.05. Karena terdapat variabel yang tidak signifikan, maka dilakukan lagi estimasi parameter regresi linear berganda dengan variabel yang signifikan saja. Diperoleh hasil sebagai berikut.

Parameter	Nilai Estimasi	p -value
<i>Intercept</i>	17.0525	0.0438
X_1	4.6246	2.46E-05
X_4	7.2952	0.0475
X_5	0.2842	0.0446

Tabel 2. Hasil estimasi parameter dengan metode kuadrat terkecil untuk model kedua

Dari Tabel 2 dapat dilihat setelah variabel X_2 dan X_3 dikeluarkan lalu dilakukan estimasi parameter terhadap X_1 , X_4 , dan X_5 diperoleh nilai p -value yang kecil dari 0.05. Jadi, variabel bebas yang berpengaruh secara signifikan terhadap variabel responnya adalah X_1 , X_4 , dan X_5 .

8. Hasil Estimasi Parameter Regresi Linear Berganda dengan Menggunakan *Bootstrap* Pasangan Data

Pada bagian ini akan dilakukan pendugaan terhadap parameter model dengan metode kuadrat terkecil sampai dihasilkannya selang kepercayaan normal dan selang kepercayaan persentil dengan teknik *bootstrap*. Untuk memperoleh hasil tersebut digunakan bantuan program statistika *R* dalam melakukan estimasi parameter regresi linear berganda menggunakan metode *bootstrap*

Pada Gambar 1 – Gambar 6 berikut diberikan hasil keseluruhan proses diatas.

PARAMETER	ESTIMASI PARAMETER DENGAN MKT	ESTIMASI PARAMETER DENGAN METODE BOOTSTRAP		SK 95% METODE BOOTSTRAP			
		NORMAL	PERSENTIL	SELANG NORMAL		SELANG PERSENTIL	
				BATAS BAWAH	BATAS ATAS	BATAS BAWAH	BATAS ATAS
β_0	17.0525	17.78655	17.90183	7.12970511	28.4433973	7.5600933	28.132534
β_1	4.6246	4.488174	4.498158	2.59039268	6.385955	2.61140853	5.936669
β_2	7.2952	7.565019	7.802308	2.19106652	12.9389717	2.49548545	13.268408
β_3	0.2842	0.2855705	0.2984893	0.05354514	0.5175958	0.06758094	0.503884

Gambar 1. Bootstrap dengan replikasi 50 kali

Berdasarkan tabel replikasi *bootstrap* di atas dapat dilihat bahwa hasil estimasi parameter dengan menggunakan metode *bootstrap* pasangan data (kolom tiga dan empat) memberikan hasil yang mendekati hasil estimasi parameter dengan metode kuadrat terkecil (kolom dua). Kemudian hasil estimasi parameter dengan metode

PARAMETER	ESTIMASI PARAMETER DENGAN MKT	ESTIMASI PARAMETER DENGAN METODE BOOTSTRAP		SK 95% METODE BOOTSTRAP			
				SELANG NORMAL		SELANG PERSENTIL	
		NORMAL	PERSENTIL	BATAS BAWAH	BATAS ATAS	BATAS BAWAH	BATAS ATAS
β_0	17.0525	17.43333	17.43282	7.07683333	27.7898335	7.00233149	26.0070343
β_1	4.6246	4.795748	4.763357	2.63727674	6.954219	2.95595742	7.2503081
β_2	7.2952	6.853772	7.135772	1.87068226	11.8368621	1.39875686	10.7382605
β_3	0.2842	0.2680341	0.277838	0.04880643	0.4872617	0.07125759	0.4704063

Gambar 2. Bootstrap dengan replikasi 100 kali

PARAMETER	ESTIMASI PARAMETER DENGAN MKT	ESTIMASI PARAMETER DENGAN METODE BOOTSTRAP		SK 95% METODE BOOTSTRAP			
				SELANG NORMAL		SELANG PERSENTIL	
		NORMAL	PERSENTIL	BATAS BAWAH	BATAS ATAS	BATAS BAWAH	BATAS ATAS
β_0	17.0525	17.22283	17.45985	5.4532766	28.992381	4.03935479	29.3802247
β_1	4.6246	4.484151	4.536309	2.33530259	6.6330000	2.40957081	6.5247099
β_2	7.2952	7.602536	7.578255	2.29400691	12.9110648	2.73623585	13.2957912
β_3	0.2842	0.2912145	0.2940052	0.07030484	0.5121241	0.08215447	0.4897869

Gambar 3. Bootstrap dengan replikasi 200 kali

PARAMETER	ESTIMASI PARAMETER DENGAN MKT	ESTIMASI PARAMETER DENGAN METODE BOOTSTRAP		SK 95% METODE BOOTSTRAP			
				SELANG NORMAL		SELANG PERSENTIL	
		NORMAL	PERSENTIL	BATAS BAWAH	BATAS ATAS	BATAS BAWAH	BATAS ATAS
β_0	17.0525	17.37358	17.58367	5.56507725	29.1820843	4.59802077	29.0086817
β_1	4.6246	4.670062	4.660774	2.29135849	7.0487651	2.40030722	7.2324323
β_2	7.2952	7.161165	7.235516	1.33036918	12.9919611	1.12680525	13.7543454
β_3	0.2842	0.2775417	0.2874785	0.04216816	0.5129152	0.02217163	0.4925676

Gambar 4. Bootstrap dengan replikasi 500 kali

PARAMETER	ESTIMASI PARAMETER DENGAN MKT	ESTIMASI PARAMETER DENGAN METODE BOOTSTRAP		SK 95% METODE BOOTSTRAP			
				SELANG NORMAL		SELANG PERSENTIL	
		NORMAL	PERSENTIL	BATAS BAWAH	BATAS ATAS	BATAS BAWAH	BATAS ATAS
β_0	17.0525	17.3943	17.71161	5.76729956	29.0213081	5.2568025	28.2525506
β_1	4.6246	4.580956	4.636802	2.41562752	6.7462836	2.3793659	6.7340873
β_2	7.2952	7.379028	7.36107	1.9163116	12.8417448	2.0097436	13.0280934
β_3	0.2842	0.2832137	0.2825636	0.04966459	0.5167628	0.0424284	0.5267163

Gambar 5. Bootstrap dengan replikasi 1000 kali

PARAMETER	ESTIMASI PARAMETER DENGAN MKT	ESTIMASI PARAMETER DENGAN METODE BOOTSTRAP		SK 95% METODE BOOTSTRAP			
		NORMAL	PERSENTIL	SELANG NORMAL		SELANG PERSENTIL	
				BATAS BAWAH	BATAS ATAS	BATAS BAWAH	BATAS ATAS
β_0	17.0525	17.39313	17.55097	5.62240334	29.163864	5.07009009	28.788229
β_1	4.6246	4.613178	4.591235	2.37003134	6.856324	2.44917117	7.0345574
β_2	7.2952	7.271811	7.198889	1.5162758	13.027345	1.5773688	13.3071274
β_3	0.2842	0.2810473	0.2886826	0.04612968	0.515965	0.02433661	0.5040238

Gambar 6. Bootstrap dengan replikasi 5000 kali

MKT untuk semua parameter model (kolom lima dan enam) terdapat di dalam selang kepercayaan normal *bootstrap* dan selang kepercayaan persentil *bootstrap* (kolom tujuh dan delapan).

Selanjutnya dihitung selisih antara kedua selang (batas atas dikurangi batas bawah) dari selang kepercayaan normal *bootstrap* dan selang kepercayaan persentil *bootstrap* untuk setiap replikasi. Hasil perhitungan tersebut disajikan pada Gambar 7.

Parameter	β_0	β_1	β_2	β_3
LEBARSK 95%				
B=50				
NORMAL	21.31369	3.795562	10.74791	0.464051
PERSENTIL	20.57244	3.32526	10.77292	0.436303
B=100				
NORMAL	20.713	4.316942	9.96618	0.438455
PERSENTIL	19.0047	4.294351	9.339504	0.399149
B=200				
NORMAL	23.5391	2.201006	10.61706	0.441819
PERSENTIL	25.34087	4.115139	10.55956	0.407632
B=500				
NORMAL	23.61701	4.757407	11.66159	0.470747
PERSENTIL	24.4106609	4.83212508	12.6275402	0.47039597
B=1000				
NORMAL	23.25401	4.330656	10.92543	0.467098
PERSENTIL	22.9957481	4.3547214	11.0183498	0.4842879
B=5000				
NORMAL	23.54146066	4.48629266	11.5110692	0.46983532
PERSENTIL	23.71813891	4.58538623	11.7297586	0.47968719

Gambar 7. Hasil estimasi parameter regresi dengan selang kepercayaan normal dan persentil

Dari tabel hasil estimasi parameter regresi linear berganda dengan menggunakan metode *bootstrap* pasangan data diatas dapat dilihat bahwa nilai estimasi metode *bootstrap* pada setiap replikasi berfluktuasi. Hal ini wajar terjadi karena beberapa faktor. Merujuk kepada penelitian sebelumnya yang telah dilakukan oleh [3] dan [4] mengenai penggunaan metode *bootstrap*, dinyatakan bahwa kemungkinan

terdapat fluktuasi pada setiap replikasi *bootstrap*. Fluktuasi ini dapat disebabkan oleh iterasi atau perulangan yang dilakukan. Seperti yang sudah dijelaskan bahwa metode *bootstrap* menggunakan teknik pengembalian dalam melakukan *resampling* data. Saat melakukan *resampling* data setiap sampel memiliki peluang yang sama untuk diambil kembali menjadi sampel yang baru. Namun sampel yang terpilih sebagai sampel baru ini tidak bisa kita pastikan akan selalu diambil lagi saat dilakukan penyampelan ulang karena dilakukan secara acak. Sehingga kemungkinan nilai tengah dan ragam sampel bisa mengalami perubahan cukup besar. Perubahan ini nantinya juga akan mempengaruhi nilai estimasi parameter dan selang kepercayaan *bootstrap* yang dihasilkan.

Berdasarkan [3] dan [4] dinyatakan bahwa dalam melakukan estimasi parameter dengan menggunakan metode *bootstrap* dapat dipilih banyaknya replikasi yang memiliki selisih selang kepercayaan terkecil dan mendekati nilai estimasi parameter yang sesungguhnya. Pada kajian ini selisih selang kepercayaan terkecil adalah pada replikasi ke 50 kali. Dengan demikian nilai estimasi parameter model pada replikasi 50 kali adalah nilai estimasi yang paling baik. Adapun replikasi *bootstrap* dilakukan beberapa kali adalah untuk melihat konsistensi hasil estimasi parameter model.

9. Penutup

Dalam kajian ini telah dibandingkan hasil estimasi parameter yang dihasilkan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dan menggunakan teknik *bootstrap*. Metode *bootstrap* memiliki asumsi dasar yaitu *bootstrap to your own data*, yang artinya bergantunglah pada data mu sendiri. Maksudnya ialah metode ini tidak memerlukan asumsi khusus dalam pengerjaannya. Metode ini hanya bergantung kepada data yang tersedia. Prinsip metode ini yaitu melakukan pensampelan dari populasi secara acak dengan teknik pengembalian. Kemudian sampel baru yang diperoleh tersebut akan dinamakan sebagai sampel *bootstrap*. Himpunan data dari sampel ini dilambangkan dengan tanda bintang, maksudnya yaitu sampel yang dijadikan sampel *bootstrap* bukanlah himpunan data yang sesungguhnya, melainkan hasil pensampelan yang dilakukan secara acak dengan teknik pengembalian. Sampel *bootstrap* ini menyebar secara empiris, dengan peluang terambilnya setiap sampel dari setiap populasi sebesar $1/n$.

Setelah dilakukan proses pensampelan, selanjutnya dilakukan proses replikasi *bootstrap* sebanyak B kali. Dari replikasi ini akan ditentukan selang kepercayaan untuk setiap parameter model. Selang kepercayaan yang digunakan yaitu selang kepercayaan normal dan persentil. Hasil estimasi dengan menggunakan teknik MKT kemudian akan dibandingkan dengan hasil estimasi *bootstrap* dan selang kepercayaan normal *bootstrap* dan selang kepercayaan persentil *bootstrap*.

Ternyata pada kajian ini dihasilkan bahwa hasil estimasi parameter dengan menggunakan teknik MKT hampir sama dengan hasil estimasi parameter *bootstrap*. Kajian ini juga menghasilkan bahwa nilai estimasi untuk semua parameter dengan MKT terdapat di dalam selang kepercayaan normal *bootstrap* dan selang kepercayaan persentil *bootstrap*.

10. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Ferra Yanuar, Bapak Dr. Dodi Devianto, Ibu Dr. Maiyastri, Bapak Dr. Admi Nazra, dan Bapak Narwen, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Efron, Bradley and R. J. Tibshirani. 1993. *An Introduction to The Bootstrap*. New York:Chapman and Hall/CRC
- [2] Hines, William W and D. C. Montgomery. 1990. *Probabilita dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen*. Jakarta:Universitas Indonesia
- [3] Kariyam, Qoirlina. 2006. Prediksi Kelainan Refraksi Berdasarkan Panjang Sumbu Bola Mata Pada Pasien Myopia Axial Melalui Regresi Bootstrap. *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT*
- [4] Mansyur, Abil ,S. Efendi, Firmansyah, dan Togi. 2010. Estimator Parameter Model Regresi Linear dengan Metode Bootstrap. *Bulletin of Mathematics* **3**(2) : 189 – 202
- [5] Sungkono, Joko. 2013. Resampling Bootstrap pada R. *Magistra* **84** : 47 – 54
- [6] Yamin, Sofyan dan Heri Kurniawan. 2011. *SPSS Complete: Teknik Analisis Statistik Terlengkap dengan Software SPSS*. Jakarta:Salemba Infotek