

MODEL PERSEDIAAN *ECONOMIC PRODUCTION QUANTITY (EPQ)* DENGAN MEMPERTIMBANGKAN DETERIORASI

IRA SORAYA

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
irasoraya.hasanah@gmail.com*

Abstrak. Persediaan dapat mengalami kerusakan atau deteriorasi sehingga persediaan tidak dapat disimpan dalam jangka waktu tak terhingga untuk memenuhi permintaan yang akan datang. Model persediaan *Economic Production Quantity (EPQ)* adalah salah satu model persediaan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pengendalian persediaan. Dalam tulisan ini dikembangkan model persediaan EPQ tanpa deteriorasi dan dengan mempertimbangkan deteriorasi. Tujuannya adalah menentukan banyaknya produksi yang meminimumkan total biaya persediaan. Model diilustrasikan dengan contoh yang diselesaikan secara numerik dengan menggunakan *software* LINGO. Kemudian dilakukan analisis sensitivitas terhadap kedua model. Model persediaan tanpa deteriorasi memiliki solusi optimum sedikit lebih kecil jika dibandingkan dengan model persediaan dengan deteriorasi.

Kata Kunci: Deteriorasi, persediaan EPQ, solusi optimum, analisis sensitivitas

1. Pendahuluan

Persediaan dapat mengalami kerusakan atau penurunan kualitas dari waktu ke waktu sehingga persediaan tidak selalu dapat disimpan atau ditimbun dalam jangka waktu yang tak terhingga untuk memenuhi permintaan yang akan datang. Barang-barang yang biasa digunakan seperti buah-buahan, bahan makanan, sayuran, produk farmasi dan komponen-komponen elektronik dapat terdeteriorasi (rusak) diakibatkan penyimpanan yang terlalu lama dibanding periode normal penyimpanannya sehingga tidak dalam kondisi sempurna untuk memenuhi permintaan yang akan datang. Persediaan yang terdeteriorasi adalah persediaan yang rusak, busuk, kering dan menguap sehingga hilangnya manfaat atau nilai marginal suatu barang atau menurunnya fungsi suatu barang dari kondisi aslinya.

Efek kerusakan pada persediaan pertama kali dikembangkan oleh Ghare dan Schrader [4]. Mereka mengamati bahwa seiring dengan waktu barang tertentu dapat menyusut dengan proporsi yang didekati oleh fungsi eksponensial negatif. Pengamatan ini menghasilkan model persediaan barang dengan proses kerusakannya dinyatakan oleh persamaan diferensial

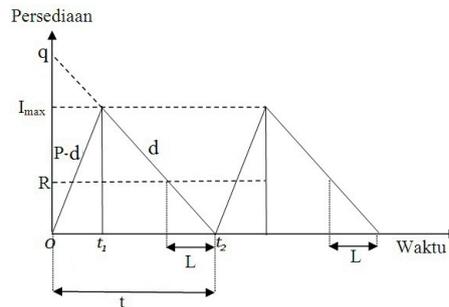
$$\frac{dI(t)}{dt} + \theta I(t) = -f(t),$$

dimana θ adalah tingkat deteriorasi yang konstan, $I(t)$ adalah level persediaan pada waktu t dan $f(t)$ adalah tingkat permintaan pada waktu t .

Dalam proses produksi sering kali perusahaan mengalami masalah untuk memperoleh rencana produksi yang paling optimal yang dapat memenuhi permintaan. Model *Economic Production Quantity* (EPQ) adalah salah satu model pengendalian persediaan. Dalam artikel ini, kita mengembangkan model EPQ tanpa adanya deteriorasi dan dengan mempertimbangkan deteriorasi. Kuantitas kehilangan produksi karena mesin rusak/usang, kerusakan produksi dan lain sebagainya juga dipertimbangkan. Solusi dari biaya total persediaan diilustrasikan dengan contoh yang diselesaikan secara numerik dengan menggunakan *software* LINGO. Selanjutnya dilakukan dianalisis sensitivitas terhadap kedua model.

2. Model Persediaan EPQ

Metode EPQ merupakan model persediaan dimana pengadaan bahan baku berupa komponen tertentu diproduksi secara massal dan dipakai sendiri sebagai sub komponen suatu produk jadi oleh perusahaan. Deskripsi model persediaan EPQ dapat dilihat melalui Gambar 1.



Gambar 1. Grafik Persediaan EPQ

Jumlah produksi selama waktu t harus memenuhi jumlah permintaan (d) selama waktu t tersebut, dinotasikan sebagai: $q = dt$. Produksi dilakukan pada masa $[0, t_1]$ dengan tingkat produksi sebesar P , seiring dengan pemenuhan permintaan. Karena jumlah produksi adalah $q = t_1.P$, maka $t_1 = \frac{q}{P}$. Pada masa ini, persediaan mencapai maksimum, yaitu sebesar $I_{max} = t_1(P - d)$, sedangkan rata-rata persediaan adalah $\bar{I} = t_1(\frac{P-d}{2})$. Pada masa $[t_1, t_2]$ proses produksi berhenti, sedangkan permintaan tetap dipenuhi, sehingga terjadinya penurunan persediaan sebesar d . Jika persediaan telah mencapai tingkat R , maka harus dilakukan pengadaan bahan baku untuk proses produksi selanjutnya selama masa L [5]. Dengan mensubstitusikan t_1 , maka rata-rata persediaan menjadi

$$\frac{q}{P}(\frac{P-d}{2}) = \frac{q(P-d)}{2P} = \frac{q}{2} - \frac{qd}{2P} = (1 - \frac{d}{P})\frac{q}{2},$$

dimana C_1 adalah biaya simpan tiap satuan waktu. Karena jumlah putaran pro-

duksi adalah $\frac{d}{q}$, maka biaya rata-rata pengadaan adalah sebesar $\frac{d}{q}C_2$, dimana C_2 adalah biaya pengadaan bahan baku tiap putaran produksi. Jadi total biaya persediaan adalah

$$\begin{aligned} Z &= \text{biaya simpan} + \text{biaya pengadaan} \\ &= \frac{d}{q}C_2 + \left(1 - \frac{d}{P}\right)\frac{q}{2}C_2; \quad q > d. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dari turunan pertama Z terhadap q yang disamakan dengan nol diperoleh jumlah produksi optimal (q^*) dalam satu putaran produksi yaitu

$$q^* = \sqrt{\frac{2dC_2}{\left(1 - \frac{d}{P}\right)C_1}}.$$

Sehingga diperoleh total biaya persediaan

$$Z^* = \frac{d}{q^*}C_2 + \left(1 - \frac{d}{P}\right)\frac{q^*}{2}C_1.$$

3. Asumsi dan Notasi

Asumsi yang digunakan dalam mengembangkan model adalah:

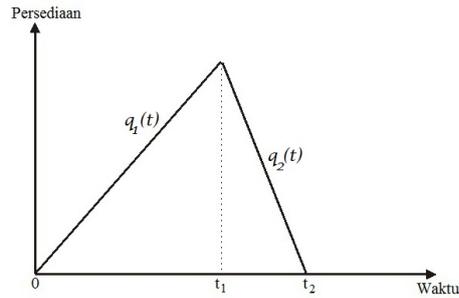
- (1) Model dikembangkan untuk persediaan produk tunggal.
- (2) Model dikembangkan untuk persediaan barang setengah jadi (*work in process*) dan barang jadi.
- (3) Tingkat produksi dan permintaan konstan.
- (4) Tidak terjadinya kekurangan persediaan (*shortages*).
- (5) Tidak ada penggantian dan perbaikan kerusakan alat selama periode T .
- (6) Bahan baku tersedia sewaktu diperlukan untuk proses produksi (*lead time/waktu tunggu nol*).

Selanjutnya notasi yang digunakan dalam mengembangkan model adalah:

- k : jumlah produksi per satuan waktu,
- d : jumlah permintaan per satuan waktu,
- ϕ : persentase kerusakan selama produksi per satuan waktu,
- $k(1 - \phi)$: produksi aktual per satuan waktu,
- C_1 : konstanta biaya simpan per satuan *item*,
- r : konstanta ongkos pembelian bahan baku per satuan *item*,
- b : konstanta biaya persiapan produksi per pesanan,
- p : konstanta harga penjualan produksi per satuan *item*,
- θ : tingkat deteriorasi (konstan) dalam persediaan per satuan waktu,
- t_1 : waktu produksi per siklus,
- q : jumlah produksi aktual yang diterima per siklus = $k(1 - \phi)t_1$,
- t_2 : panjang dari masing-masing siklus,
- T : periode keseluruhan,
- q_1 : tingkat persediaan selama periode produksi ($0 \leq t \leq t_1$),
- q_2 : tingkat persediaan selama periode produksi dihentikan $t_1 \leq t \leq t_2$.

4. Model Persediaan EPQ Tanpa Deteriorasi

Deskripsi model persediaan EPQ tanpa terdeteriorasi dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Grafik Persediaan EPQ tanpa deteriorasi

Pada saat $t = 0$ tingkat persediaan adalah nol. Pada periode produksi $[0, t_1]$ tingkat persediaan dipengaruhi oleh banyaknya produksi aktual dan tingkat permintaan. Pada periode $[t_1, t_2]$ dimana produksi dihentikan, tingkat persediaan hanya dipengaruhi oleh tingkat permintaan. Karena adanya tingkat permintaan yang terus dipenuhi, hal ini mengakibatkan tingkat persediaan mengalami penurunan dan mencapai nol pada saat $t = t_2$. Siklus kemudian berulang untuk seluruh periode T . Tingkat persediaan pada periode $[0, t_2]$ dapat dinyatakan oleh persamaan diferensial berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= k(1 - \phi) - d; & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{dq_2}{dt} &= -d; & t_1 \leq t \leq t_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

dimana

$$q_1(0) = 0; \quad q_1(t_1) = q_2(t_1) \quad \text{dan} \quad q_2(t_2) = 0.$$

Solusi dari persamaan (4.1) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} q_1 &= [k(1 - \phi) - d]t & \text{untuk} & \quad 0 \leq t \leq t_1, \\ q_2 &= d(t_2 - t) & \text{untuk} & \quad t_1 \leq t \leq t_2. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kondisi $q_1(t_1) = q_2(t_1)$ diperoleh

$$t_2 = \frac{q}{d}.$$

Biaya-biaya yang diakibatkan karena adanya persediaan adalah:

(1) Biaya simpan (*holding cost/HC*) dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} HC &= C_1 \left\{ \int_0^{t_1} q_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} q_2(t) dt \right\} \\ &= C_1 \left\{ (k(1 - \phi) - d) \frac{t_1^2}{2} + \frac{d}{2} (t_2 - t_1)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

- (2) Biaya kehilangan produksi karena mesin rusak (LP) dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$LP = rk\phi t_1. \quad (4.3)$$

- (3) Biaya persiapan produksi atau *set-up cost* dinotasikan dengan b .

Jadi biaya total persediaan untuk seluruh perencanaan selama periode T adalah

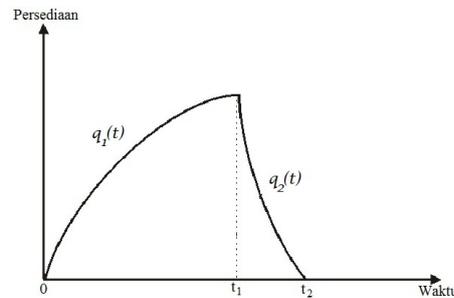
$$\begin{aligned} Z(q, d) &= (HC + LP + b) \frac{T}{t_2}, \\ &= \{C_1 \{ (k(1 - \phi) - d) \frac{t_1^2}{2} + \frac{d}{2} (t_2 - t_1)^2 \} + rk\phi t_1 + b\} \frac{T}{t_2}, \\ &= dA + B, \end{aligned} \quad (4.4)$$

dimana,

$$\begin{aligned} A &= \frac{r\phi T}{1 - \phi} - \frac{C_1 q T}{2k(1 - \phi)} + \frac{bT}{q}, \\ B &= \frac{C_1 q T}{2}. \end{aligned}$$

5. Model Persediaan EPQ dengan Mempertimbangkan Deteriorasi

Deskripsi model persediaan EPQ dengan mempertimbangkan deteriorasi dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Grafik Persediaan EPQ dengan deteriorasi

Dari Gambar 3 dapat dilihat bahwa tingkat persediaan adalah nol pada saat $t = 0$. Proses produksi dimulai pada saat $t = 0$ dan berlanjut hingga $t = t_1$, pada periode ini persediaan berkurang karena adanya deteriorasi dan permintaan. Persediaan mencapai tingkat maksimum pada saat $t = t_1$. Tingkat produksi yang diamati menjadi lebih kecil dibanding tingkat produksi yang diinginkan ketika terjadinya kerusakan mesin. Proses produksi dihentikan pada periode $[t_1, t_2]$, sedangkan permintaan tetap dipenuhi dan deteriorasi tetap terjadi. Akibatnya persediaan semakin lama semakin berkurang dan habis pada saat $t = t_2$. Tingkat persediaan

pada periode $[0, t_2]$ dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} + \theta q_1 &= k(1 - \phi) - d; & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{dq_2}{dt} + \theta q_2 &= -d; & t_1 \leq t \leq t_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

dimana,

$$q_1(0) = 0; \quad q_1(t_1) = q_2(t_1) \quad \text{dan} \quad q_2(t_2) = 0.$$

Solusi persamaan di atas adalah

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{k(1 - \phi) - d}{\theta} (1 - e^{-\theta t}) & \text{untuk} & \quad 0 \leq t \leq t_1, \\ q_2 &= \frac{d}{\theta} (e^{\theta(t_2 - t)} - 1) & \text{untuk} & \quad t_1 \leq t \leq t_2. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kondisi $q_1(t_1) = q_2(t_1)$ diperoleh

$$t_2 = \frac{q}{d} \left(1 + \frac{\theta t_1}{2}\right) - \frac{\theta q^2}{2d^2}.$$

Biaya-biaya yang diakibatkan karena adanya persediaan adalah:

(1) Biaya simpan (*holding cost*/HC) adalah

$$\begin{aligned} HC &= C_1 \left\{ \int_0^{t_1} q_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} q_2(t) dt \right\}. \\ &\approx C_1 \left[(k(1 - \phi) - d) \left(\frac{t_1^2}{2} - \frac{\theta t_1^3}{6} \right) + d \left\{ \frac{(t_2 - t_1)^2}{2} + \frac{\theta(t_2 - t_1)^3}{6} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

(2) Biaya kehilangan produksi karena mesin rusak yang dinotasikan dengan *LP* adalah

$$LP = rk\phi t_1. \quad (5.3)$$

(3) Biaya kehilangan persediaan karena terjadinya deteriorasi yang dinotasikan *LS* adalah

$$\begin{aligned} LS &= p\theta \left\{ \int_0^{t_1} q_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} q_2(t) dt \right\} \\ &= p[k(1 - \phi)t_1 - dt_2]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

(4) Biaya persiapan produksi atau *set-up cost* yang dinotasikan dengan *b*.

Jadi, biaya total persediaan untuk seluruh perencanaan selama periode *T* adalah

$$\begin{aligned} Z(q, d, \theta) &= (HC + LS + LP + b) \frac{T}{t_2}, \\ &= [(C_1 + p\theta) \left\{ (k - k\phi - d) \left(\frac{t_1^2}{2} - \frac{\theta t_1^3}{6} \right) + \frac{d(t_2 - t_1)^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\theta(t_2 - t_1)^3}{6} \right\} + rk\phi t_1 + b] \frac{T}{t_2}, \\ &= A_1 + \theta A_2 + dA_3 - d\theta A_4 - \frac{\theta}{d} A_5, \end{aligned} \quad (5.6)$$

dimana

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{C_1 q T}{2}, \\
 A_2 &= \left(pq + \frac{r q \phi}{1 - \phi} + b \right) \frac{T}{2}, \\
 A_3 &= \left\{ \frac{b}{q} + \frac{r \phi}{1 - \phi} - \frac{C_1 q}{2k(1 - \phi)} \right\} \frac{T}{2}, \\
 A_4 &= \left\{ \frac{r q \phi + (b + pq)(1 - \phi)}{k(1 - \phi)^2} - \frac{C_1 q^2}{6k^2(1 - \phi)^2} \right\} \frac{T}{2}, \\
 A_5 &= \frac{C_1 q^2 T}{12} \quad \text{dan } \theta, d > 0.
 \end{aligned}$$

6. Solusi Numerik

Dalam tulisan ini, model diilustrasikan dengan contoh numerik dimana parameter-parameter yang digunakan berdasarkan kasus model persediaan *economic production quantity* pada tulisan De, et.al [2], yaitu : $C_1 = 10$, $b = 500$, $p = 3$, $r = 1$, $k = 10$, $\phi = 0,005$, $d = 2$, $\theta = 0,004$ dan $T = 40$. Solusi optimal pada model dapat dilihat pada tabel 1.

Table 1. Solusi Optimal

	q^*	Z^*
Tanpa Deteriorasi	15,82133	5056,867
Dengan Deteriorasi	15,91341	5075,768

Selanjutnya, dilakukan uji sensitivitas terhadap variabel keputusan q^* dan Z^* , ketika parameter-parameter C_1 , b , k , p , r , ϕ dan T berubah sebesar +50%, +20%, +10%, -10%, -20% dan -50%.

Table 2 Analisis Sensitivitas

Tanpa deteriorasi				Dengan deteriorasi			
Parameter	Perubahan (%)	q^*	Z^*	Parameter	Perubahan (%)	q^*	Z^*
C_1	+50	12,91806	6193,282	C_1	+50	12,98046	6211,638
	+20	14,44283	5539,482		+20	14,52017	5558,124
	+10	15,08505	5303,667		+10	15,16911	5322,430
	-10	16,67715	4797,386		-10	16,77896	4816,446
	-20	17,68878	4523,042		-20	17,80265	4542,294
	-50	22,37474	3575,863		-50	22,55193	3595,998
b	+50	19,37709	6193,282	b	+50	19,51839	6220,762
	+20	17,33140	5539,482		+20	17,44308	5561,834
	+10	16,59355	5303,667		+10	16,69542	5324,298
	-10	15,00943	4797,386		-10	15,09177	4814,550
	-20	14,15103	4523,042		-20	14,22366	4538,459
	-50	11,18737	3575,863		-50	11,23120	3585,958
k	+50	15,19697	5264,611	k	+50	15,27620	5287,224
	+20	15,49972	5161,784		+20	15,58512	5182,542
	+10	15,64346	5114,361		+10	15,73182	5134,276
	-10	16,04720	4985,696		-10	16,14407	5003,358
	-20	16,34363	4895,277		-20	16,44689	4911,389
	-50	18,28808	4374,837		-50	18,43644	4382,551
p	+50	15,82133	5056,867	p	+50	15,90855	5077,294
	+20	15,82133	5056,867		+20	15,91147	5076,379
	+10	15,82133	5056,867		+10	15,91244	5076,073
	-10	15,82133	5056,867		-10	15,91438	5075,463
	-20	15,82133	5056,867		-20	15,91536	5075,158
	-50	15,82133	5056,867		-50	15,91827	5074,242
r	+50	15,82133	5057,068	r	+50	15,91340	5075,972
	+20	15,82133	5056,948		+20	15,91341	5075,850
	+10	15,82133	5056,907		+10	15,91341	5075,809
	-10	15,82133	5056,827		-10	15,91341	5075,728
	-20	15,82133	5056,787		-20	15,91341	5075,687
	-50	15,82133	5056,666		-50	15,91342	5075,565
ϕ	+50	15,82634	5055,467	ϕ	+50	15,91852	5074,343
	+20	15,82333	5056,308		+20	15,91545	5075,199
	+10	15,82233	5056,588		+10	15,91443	5057,484
	-10	15,82033	5057,146		-10	15,91239	5076,052
	-20	15,81933	5057,425		-20	15,91137	5076,336
	-50	15,81634	5058,259		-50	15,90833	5077,186
T	+50	15,82133	7585,301	T	+50	15,91341	7613,653
	+20	15,82133	6068,241		+20	15,91341	6090,922
	+10	15,82133	5562,554		+10	15,91341	5583,345
	-10	15,82133	4551,180		-10	15,91341	4568,192
	-20	15,82133	4045,494		-20	15,91341	4060,615
	-50	15,82133	2528,434		-50	15,91341	2537,884

Dari tabel 2 dapat disimpulkan bahwa hasil uji sensitivitas perubahan parameter sebesar +50%, +20%, +10%, -10%, -20% dan -50% mempunyai pengaruh terhadap q^* dan Z^* . Parameter C_1 dan b sensitif dan k sedikit sensitif, parameter p , r dan ϕ tidak sensitif. Sedangkan parameter T , sensitif untuk Z^* dan tidak sensitif untuk q^* .

7. Penutup

Hasil solusi optimum dari kedua model tidak memiliki perbedaan yang signifikan. Tetapi, model persediaan tanpa deteriorasi memiliki solusi optimum sedikit lebih kecil jika dibandingkan dengan model persediaan dengan deteriorasi. Hal ini disebabkan karena adanya penambahan biaya kerusakan (deteriorasi). Kedua model EPQ diilustrasikan dengan contoh yang diselesaikan secara numerik, diperoleh hasil bahwa model dengan deteriorasi harus memproduksi barang sedikit lebih banyak dan mengeluarkan tambahan biaya persediaan. Hasil simulasi memperlihatkan bahwa dari perubahan parameter-parameter sebesar +50%, +20%, +10%, -10%, -20% dan -50% menunjukkan bahwa parameter C_1 dan b sensitif dan k sedikit sensitif, parameter p , r dan ϕ tidak sensitif. Sedangkan parameter T , sensitif untuk Z^* dan tidak sensitif untuk q^* .

8. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Arrival Rince Putri, M.T, M.Si, Bapak Efendi, M.Si, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Bapak Bukti Ginting, M.Si dan Bapak Budi Rudianto, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Bawono, Baju, T.J. Ai and R.D. Astanti. 2013. Hibah Bersaing. *Pengembangan Model dan Solusi Economic Production Quantity Untuk kondisi Sistem Produksi Tidak Sempurna dan Shortage Untuk Peningkatan Produktivitas dan Daya Saing Suatu Industri Manufaktur*. Universitas Atma Jaya Yogyakarta. Yogyakarta.
- [2] De, S.K., P.K. Kundu and A. Goswami. 2003. "An Economic Production Quantity Inventory Model Involving Fuzzy Demand Rate and Fuzzy Deterioration Rate". *J. Appl. Math. & Computing*. **2** : 251-260.
- [3] JR, Frank Ayres. 1990. *Seri Buku Schaum Teori dan Soal-Soal Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric*. Diterjemahkan oleh: Dra. Lily Ratna. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- [4] Ghare, P.M., G.P. Schrader. 1963. "A Model for Exponentially Decaying Inventory". *J. Ind. Eng.* **14** : 203-211.
- [5] Sitepu, Y. L. P., D. Sebayang and U. Sinulingga. 2013. "Pengendalian Persediaan Produksi *Crude Palm Oil* (CPO) Menggunakan Model *Economic Production Quantity* (EPQ) Pada PKS. PT. ABC". *Saintia Matematika*. **1**(5): 495-506.
- [6] Tersine, R.J. 1994. *Principles of Inventory and Management*. New Jersey : Prentice Hall.