PELABELAN TOTAL (a, d) -SISI ANTI AJAIB SUPER PADA GABUNGAN GRAF LENGKAP mK_n

HELEN PARKHURST

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 helenparkhurst.hp@gmail.com*

Abstrak. Misalkan G adalah suatu graf dengan banyak titik p dan banyak sisi q . Pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib dari graf G adalah suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga bobot sisi $w(u, v) = f(u) + f(uv) + f(v)$ dengan $uv \in E(G)$ membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d . Suatu pelabelan total graf G dikatakan super jika $f(V) = \{1, 2, \dots, p\}$. Tulisan ini mengkaji kembali tentang pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib super pada gabungan graf lengkap mK_n untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, seperti yang telah diperoleh dalam [1].

Kata Kunci: Pelabelan total (a, d) -Sisi Antiajaib, Graf Lengkap, Gabungan Graf lengkap

1. Pendahuluan

Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Suatu graf $G = (V, E)$ dengan $V(G)$ dan $E(G)$ berturut-turut adalah himpunan titik dan himpunan sisi pada graf G . Banyaknya titik pada G dinotasikan sebagai $|V(G)| = p$ dan sementara banyaknya sisi pada G dinotasikan $|E(G)| = q$. Pelabelan (*labeling*) pada suatu graf adalah pemetaan atau dari setiap elemen graf ke bilangan bulat positif, yang mana bilangan tersebut disebut dengan label. Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan titik (atau himpunan sisi), maka pelabelannya disebut pelabelan titik (atau pelabelan sisi). Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan titik dan himpunan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan total.

Suatu fungsi bijeksi $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ dikatakan sebagai *pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib* pada graf G jika himpunan bobot sisi untuk semua sisi di G yang dinotasikan dengan $W = \{w(xy) | w(xy) = f(x) + f(xy) + f(y), xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$. Suatu pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib dari graf G dikatakan *super* apabila $f(V) = \{1, 2, \dots, p\}$.

2. Pelabelan Total (a, d) -Sisi Antiajaib Super Pada Gabungan Graf Lengkap mK_n

Pada bagian ini akan dikaji kembali tentang pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib super pada graf yang dikonstruksi dari gabungan saling lepas m graf lengkap K_n ,

dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 1$, seperti yang telah dibahas dalam [1]. Pada Gambar 2 diberikan ilustrasi graf mK_n , untuk $n \geq 1$.

Gambar 1. Gabungan m graf K_n

Himpunan titik dan sisi graf mK_n dinotasikan sebagai berikut.

$$V(mK_n) = \{x_i^j : 1 \leq i \leq n \text{ dan } 1 \leq j \leq m\},$$

$$E(mK_n) = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^{n-1} \{x_i^j x_{i+k}^j : 1 \leq k \leq n-i\}.$$

Diperoleh bahwa banyaknya titik $|V(mK_n)| = p = mn$ dan banyaknya sisi $|E(mK_n)| = q = \frac{mn(n-1)}{2}$.

Misalkan mK_n , $m \geq 2$, mempunyai pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib super $h : V(mK_n) \cup E(mK_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, \frac{mn(n+1)}{2}\}$, maka himpunan bobot sisi mK_n dapat dituliskan sebagai $\{w(uv) : uv \in E(mK_n)\} = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (\frac{mn(n-1)}{2} - 1)d\}$. Jumlah semua bobot sisi adalah:

$$\sum_{uv \in E(mK_n)} w(uv) = \frac{mn(n-1)}{2} \left(a + \left(\frac{mn(n-1)-2}{4} \right) d \right) \quad (2.1)$$

Dalam perhitungan bobot sisi mK_n label setiap sisi dihitung satu kali dan label setiap titik digunakan $(n-1)$ kali. Maka diperoleh jumlah bobot sisi sebagai berikut.

$$(n-1) \sum_{u \in V(mK_n)} h(u) + \sum_{uv \in E(mK_n)} h(uv) = \frac{(n-1)mn(mn^2 + 7mn + 6)}{8}. \quad (2.2)$$

Dari pertidaksamaan (2.1) dan (2.2), diperoleh

$$\frac{mn(n-1)}{2} \left(\left(\frac{4a + mn(n-1)-2}{4} \right) d \right) = \frac{mn(n-1)(mn^2 + 7mn + 6)}{8}$$

$$4a + (mn(n-1)-2)d = mn^2 + 7mn + 6. \quad (2.3)$$

Bobot sisi maksimum adalah $\frac{mn^2}{2} + \frac{5mn}{2} - 1$. Bobot ini diperoleh apabila kedua titik dilabeli dengan label titik terbesar, yaitu $mn-1$ dan mn , serta sisi terkait juga dilabeli dengan label sisi terbesar, yaitu $\frac{mn(n+1)}{2}$.

Sedangkan bobot sisi minimum adalah $mn+4$. Bobot ini diperoleh apabila kedua titik dilabeli dengan label titik terkecil, yaitu 1 dan 2, serta sisi terkait juga dilabeli

dengan label sisi terkecil, yaitu $mn + 4$. Karena nilai bobot sisi tidak akan kurang dari $mn + 4$ dan tidak akan lebih dari $\frac{mn^2}{2} + \frac{5mn}{2} - 1$, maka

$$\begin{aligned} mn + 4 &\leq a, \\ a + \left(\frac{mn(n-1)}{2} - 1 \right) d &\leq \frac{mn^2 + 5mn - 2}{2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dari (2.4), diperoleh:

$$\begin{aligned} mn + 4 + \left(\frac{mn(n-1)}{2} - 1 \right) d &\leq a + \left(\frac{mn(n-1)}{2} - 1 \right) d \leq \frac{mn^2 + 5mn - 2}{2} \\ mn + 4 + \left(\frac{mn(n-1)}{2} - 1 \right) d &\leq \frac{mn^2 + 5mn - 2}{2} \\ d &\leq 1 + \frac{4m - 8}{mn^2 - mn - 2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Akibat 2.1. Untuk mK_3 dan mK_4 , $m \geq 2$, tidak ada pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib super dengan $d \geq 3$.

Bukti. Untuk graf lengkap mK_3 dengan $m \geq 2$, diperoleh

$$\begin{aligned} d &\leq 1 + \frac{4mn - 8}{mn^2 - mn - 2}, \\ &= \frac{13}{5}. \end{aligned}$$

Oleh karena $d \leq \frac{13}{5}$, maka haruslah $d \in \{0, 1, 2\}$. Jadi jelas bahwa tidak terdapat pelabelan total $(a, 3)$ -sisi antiajaib super pada mK_3 .

Untuk graf lengkap mK_4 dengan $m \geq 2$, diperoleh

$$\begin{aligned} d &\leq 1 + \frac{4mn - 8}{mn^2 - mn - 2}, \\ &= \frac{23}{11}. \end{aligned}$$

Oleh karena $d \leq \frac{23}{11}$, maka $d \in \{0, 1, 2\}$. Jadi jelas tidak terdapat pelabelan total $(a, 3)$ -sisi antiajaib super pada mK_4 . $\square$

Akibat 2.2. Untuk setiap mK_n , $n \geq 5$, dan $m \geq 2$, tidak ada pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib super dengan $d \geq 2$.

Bukti. Langkah pembuktian serupa dengan langkah pembuktian Akibat 2.2. $\square$

3. Kesimpulan

Misal terdapat graf yang merupakan gabungan dari sebanyak m buah graf lengkap K_n , dinotasikan mK_n . Pada tulisan ini telah dikaji kembali bahwa untuk $m \geq 2$ dan $n \in \{3, 4\}$ tidak terdapat pelabelan (a, d) -sisi antiajaib super dengan $d \geq 3$. Selanjutnya, telah dikaji kembali bahwa untuk $n \geq 5$ dan $m \geq 2$, tidak terdapat pelabelan (a, d) -sisi antiajaib super dengan $d \geq 2$.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Ibu Dr. Yanita, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Narwen, M. Si dan Bapak Zulakmal, M. Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Baca, M dan Miller, M. 2008, *Super Edge Antimagic Graphs*, Brown Walker Press, Boca Raton-Florida
- [2] Chartrand, G dan L. Lesniak. 1996. *Graphs and Digraphs*. Third Edition, Chapman Hall/ CRC, Boca Raton-Florida
- [3] Enomoto H., Llado, A.S, Nakamigawa, T., Ringel, G. 1998. *Super Edge-Magic Graphs*. SUT Journal of Mathematics **34** (2): 105 – 109
- [4] Sugeng K. A. 2005. *Magic and Antimagic Labeling of Graphs*. Ph.D-Thesis, Tidak diterbitkan