PENDUGAAN PARAMETER MODEL AUTOREGRESSIVE PADA DERET WAKTU

NELFA SARI

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 nelfasari@gmail.com*

Abstrak. Model deret waktu stokastik dikenal dengan model ARIMA. Model ARIMA terdiri dari model AR, MA dan ARMA. Model AR adalah bentuk regresi yang menghubungkan suatu nilai pengamatan dengan nilai pengamatan masa lalunya pada selang waktu tertentu. Dari hubungan tersebut, terdapat parameter model AR yang akan diduga. Untuk pendugaan parameter dikhususkan untuk AR orde satu yang dinotasikan dengan AR(1) dan AR orde dua yang dinotasikan dengan AR(2). Pendugaan parameter model AR(1) dan model AR(2) ini menggunakan metode momen, metode kuadrat terkecil dan metode kemungkinan maksimum. Dari uraian ketiga metode pendugaan tersebut menghasilkan sistem persamaan *Yule Walker* dan diperoleh penduga model AR dengan menyelesaikan penduga dari sistem persamaan *Yule Walker*. Rumus yang diperoleh diterapkan pada dua contoh data.

Kata Kunci: Model Autoregressive, sistem persamaan Yule Walker, metode momen, metode kuadrat terkecil, metode kemungkinan maksimum

1. Pendahuluan

Deret waktu adalah fenomena-fenomena yang dikelompokkan berdasarkan interval waktu tertentu. Analisis yang dilakukan terhadap data deret waktu dapat digunakan untuk memprediksi keadaan yang akan datang. Prediksi ini dapat dilakukan dengan menduga parameter dari model deret waktu tersebut [1].

Dalam model deret waktu ini dikenal model ARIMA (p, d, q) , dimana model ini terdiri dari model AR dan MA. Model AR dengan orde p dinotasikan dengan AR(p). Model MA dengan orde q dinotasikan dengan MA(q). Gabungan kedua model tersebut dinotasikan dengan ARMA(p, q). Sedangkan lambang d hanya digunakan saat data distasionerkan terhadap nilai tengah. Pada tulisan ini akan dibahas mengenai model AR(p) yang dinyatakan dengan persamaan

$$X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t ; Z_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

Jika $E(X_t) = \mu$ dan $\tilde{X}_t = X_t - \mu$, model AR(p) dapat juga dinyatakan sebagai berikut:

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{X}_{t-p},$$

dengan $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ adalah parameter dari model AR(p).

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Kestasioneran

Stasioner berarti tidak terdapat pertumbuhan dan penurunan pada data untuk periode waktu tertentu. Kestasioneran dapat dibagi menjadi stasioner pada nilai tengah yaitu jika $E(X_t) = \mu_x(t) = \mu$ untuk setiap waktu. Stasioner pada ragam yaitu jika $Var(X_t) = E(X_t - \mu_t)^2 = \sigma^2$ untuk setiap waktu. Dan stasioner pada kovarians yaitu jika $\gamma_{(t+h,t)}$ bebas dari t untuk setiap h [2].

Dalam pembentukan model deret waktu disyaratkan bahwa data dalam keadaan stasioner. Bila deret waktu tidak stasioner dalam nilai tengah, dapat dilakukan pembedaan (*differencing*) yang dinyatakan sebagai berikut:

$$X_t^d = (1 - B)^d X_t, \quad d = 1, 2, 3, \dots,$$

dengan d adalah orde pembedaan.

2.2. Fungsi Autokovarian, Fungsi Autokorelasi dan Fungsi Autokorelasi Parsial

Fungsi autokovarians, fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsial merupakan fungsi yang berperan pada pendugaan parameter model ARIMA. Rumus umum dari fungsi autokovarians yaitu:

$$\gamma_h = Cov(X_t, X_{t-h}) = E(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu),$$

dimana penduganya adalah $\hat{\gamma}_h = \frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})$.

Fungsi autokorelasi dinyatakan oleh

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = Corr(X_{t+h}, X_t),$$

dimana penduganya

$$\hat{\rho}_h = \frac{\hat{\gamma}_h}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=h+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}.$$

Fungsi autokorelasi parsial dapat diperoleh dengan menyelesaikan formula Durbin yaitu [3]

$$\phi_{hh} = \frac{\rho_h - \sum_{j=1}^{h-1} \phi_{h-1,j} \rho_{h-j}}{1 - \sum_{j=1}^{h-1} \phi_{h-1,j} \rho_j},$$

dimana $\phi_{hj} = \phi_{h-1,j} - \phi_{hh} \phi_{h-1,h-j}; j = 1, 2, \dots, h-1$.

2.3. Proses White Noise

Proses *White Noise* sama dengan kesalahan/eror pada model regresi biasa. Untuk model deret waktu ini, proses *White Noise* dinotasikan dengan $\{Z_t\}$. Proses *White Noise* memiliki sifat-sifat antara lain deretnya terdiri dari peubah acak yang berurutan tidak saling berkorelasi, $E(Z_t) = 0$ untuk setiap waktu, $Var(Z_t) = \sigma^2$ untuk setiap waktu dan $\gamma_h = Cov(Z_{t+h}, Z_t) = 0$ untuk $h \neq 0$ [4].

2.4. Deviasi Nilai Tengah

Model *autoregressive* merupakan deret waktu stokastik, karena *autoregressive* hanya dapat menunjukkan struktur probabilistik keadaan yang akan datang. Nilai tengah dari deret waktu stasioner yaitu $E(X_t) = \mu$ bisa diperlakukan sebagai komponen deterministik. Jika dilihat dari perilaku stokastik maka kondisi ini disebut dengan deviasi nilai tengah, sehingga terbentuk deret waktu baru.

Didefinisikan deret waktu baru $\tilde{X}_t$ sebagai berikut [4]:

$$\tilde{X}_t = X_t - \mu. \quad (2.1)$$

Deret waktu $\{\tilde{X}_t\}$ berkelakuan persis dengan deret waktu $\{X_t\}$, kecuali untuk nilai tengah, dimana $E(X_t) = \mu$ dan $E(\tilde{X}_t) = 0$.

2.5. Model Autoregressive (AR)

Autoregressive adalah bentuk regresi yang menghubungkan nilai pengamatan X_t dengan nilai-nilai sebelumnya pada selang waktu tertentu. Secara umum, persamaan $AR(p)$ dapat dituliskan

$$X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t ; Z_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad (2.2)$$

diasumsikan X_s dan Z_t saling bebas $\forall s < t$ dan $\delta = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)$.

Jika $E(X_t) = \mu$ dan $\tilde{X}_t = X_t - \mu$, maka Persamaan (2.2) dapat ditulis

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{X}_{t-p} + Z_t. \quad (2.3)$$

Pada model AR ini, akan dibahas AR(1) dan AR(2). Untuk AR(1) memiliki persamaan sebagai berikut:

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + Z_t \quad (2.4)$$

dan AR(2) memiliki persamaan sebagai berikut:

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + Z_t. \quad (2.5)$$

2.6. Sistem Persamaan Yule Walker

Sistem persamaan *Yule Walker* dari model $AR(p)$ dapat diberikan sebagai berikut [3]:

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} + \phi_2 \rho_{h-2} + \cdots + \phi_p \rho_{h-p}, \quad (2.6)$$

dengan mensubstitusikan $h = 1, 2, \dots, p$, diperoleh

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \cdots + \phi_p \rho_{p-1}, \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p \rho_{p-2}, \\ &\vdots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \cdots + \phi_p, \end{aligned}$$

atau

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix}.$$

Jika disubstitusi dengan penduganya, maka diperoleh penduga *Yule Walker* [3] yaitu

$$\begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix}.$$

Solusi dari sistem persamaan di atas merupakan penduga dari model $AR(p)$.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Metode Momen

Menurut [3], pendugaan parameter model AR dengan metode momen adalah pendugaan dengan mensubstitusi momen contoh, diantaranya yaitu nilai tengah contoh dan fungsi autokorelasi contoh.

Untuk parameter μ diperoleh dengan menyamakan momen contoh ke-1 dan momen populasi ke-1 [5] yaitu

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= E(X_t) = \mu, \\ M'_1 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t = \bar{X}, \end{aligned}$$

karena $\mu'_1 = M'_1$, sehingga didapat penduga nilai tengah adalah $\hat{\mu} = \bar{X}$.

Untuk memperoleh penduga dari $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$, pertama persamaan $AR(p)$ dikalikan dengan $\tilde{X}_{t-h}$ yaitu:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t &= \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{X}_{t-p} + Z_t, \\ \tilde{X}_{t-h} \tilde{X}_t &= \phi_1 \tilde{X}_{t-h} \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-h} \tilde{X}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{X}_{t-h} \tilde{X}_{t-p} + \tilde{X}_{t-h} Z_t. \end{aligned}$$

Bila memasukkan nilai harapan yaitu:

$$E(\tilde{X}_{t-h} \tilde{X}_t) = E(\phi_1 \tilde{X}_{t-h} \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-h} \tilde{X}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{X}_{t-h} \tilde{X}_{t-p} + \tilde{X}_{t-h} Z_t)$$

akan diperoleh persamaan dari fungsi autokovarian, dan setelah dibagi dengan γ_0 diperoleh persamaan

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} + \phi_2 \rho_{h-2} + \cdots + \phi_p \rho_{h-p}. \quad (3.1)$$

Dengan mensubstitusikan $h = 1, 2, \dots, p$, diperoleh:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \cdots + \phi_p \rho_{p-1}, \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p \rho_{p-2}, \\ &\vdots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \cdots + \phi_p, \end{aligned} \quad (3.2)$$

sehingga solusi dari penduga $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ diperoleh dengan mensubstitusi fungsi autokorelasi contoh dari sistem persamaan (3.2) yaitu

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Berdasarkan sistem persamaan (3.3) dapat diperoleh penduga untuk model AR(p). Karena model AR(1) memiliki nilai $p = 1$ maka diperoleh

$$\hat{\phi}_1 = [1]^{-1}[\hat{\rho}_1] = 1 \cdot \hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_1,$$

dan karena model AR(2) memiliki nilai $p = 2$ maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2}{1 - \hat{\rho}_1^2} \\ \frac{\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1^2}{1 - \hat{\rho}_1^2} \end{bmatrix},$$

dimana $\hat{\rho}_h = \frac{\hat{\gamma}_h}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=h+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}.$

3.2. Metode Kuadrat Terkecil

Misalkan $\{\tilde{X}_t\}$ adalah deret waktu stasioner. Didefinisikan model AR(p) yaitu:

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{X}_{t-p} + Z_t; \quad Z_t \sim WN(0, \sigma^2). \quad (3.4)$$

Karena $\tilde{X}_t = X_t - \mu$, maka Persamaan (3.4) menjadi:

$$X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \phi_2 (X_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p (X_{t-p} - \mu) + Z_t. \quad (3.5)$$

Jumlah kuadrat sisa pada Persamaan (3.5) dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p) = \sum_{t=p+1}^n Z_t^2 = \sum_{t=p+1}^n [(X_t - \mu) - \phi_1 (X_{t-1} - \mu) - \cdots - \phi_p (X_{t-p} - \mu)]^2.$$

Pertama, akan ditentukan penduga dari μ , yang diperoleh dengan menyelesaikan persamaan:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p) = 0, \quad (3.6)$$

dimana penyelesaiannya adalah

$$\mu = \frac{\left(\sum_{t=p+1}^n X_t - \phi_1 \sum_{t=p+1}^n X_{t-1} - \cdots - \phi_p \sum_{t=p+1}^n X_{t-p} \right)}{(n-p)(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)}.$$

Karena ukuran contoh untuk kombinasi model ARIMA cukup besar [4], maka berlaku:

$$\frac{\sum_{t=p+1}^n X_t}{n-p} \approx \frac{\sum_{t=p+1}^n X_{t-1}}{n-p} \approx \cdots \approx \frac{\sum_{t=p+1}^n X_{t-p}}{n-p} \approx \bar{X}$$

sehingga diperoleh $\hat{\mu} = \bar{X}$.

Selanjutnya akan ditentukan penduga dari $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ dimana dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p) = 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, p. \quad (3.7)$$

Adapun penyelesaian Persamaan (3.7) terhadap ϕ_1 yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=p+1}^n (X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu) - \frac{1}{n} \phi_1 \sum_{t=p+1}^n (X_{t-1} - \mu)(X_{t-1} - \mu) - \cdots - \\ \frac{1}{n} \phi_p \sum_{t=p+1}^n (X_{t-p} - \mu)(X_{t-1} - \mu) = 0. \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi persamaan di atas dengan penduganya dan menyelesaikannya didapatkan:

$$\hat{\gamma}_1 = \hat{\phi}_1 \hat{\gamma}_0 + \hat{\phi}_2 \hat{\gamma}_1 + \cdots + \hat{\phi}_p \hat{\gamma}_{p-1}.$$

Selanjutnya, setiap sisi persamaan dibagi dengan $\hat{\gamma}_0$ diperoleh:

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 \hat{\rho}_1 + \cdots + \hat{\phi}_p \hat{\rho}_{p-1}. \quad (3.8)$$

Dengan cara yang sama, penyelesaian Persamaan (3.7) terhadap ϕ_2 adalah:

$$\hat{\rho}_2 = \hat{\phi}_1 \hat{\rho}_1 + \hat{\phi}_2 + \cdots + \hat{\phi}_p \hat{\rho}_{p-2}, \quad (3.9)$$

demikian seterusnya sampai penyelesaian dari Persamaan (3.7) terhadap ϕ_p diperoleh:

$$\hat{\rho}_p = \hat{\phi}_1 \hat{\rho}_{p-1} + \hat{\phi}_2 \hat{\rho}_{p-2} + \cdots + \hat{\phi}_p. \quad (3.10)$$

Persamaan (3.8) - (3.10) dikenal dengan penduga *Yule Walker*. Untuk memperoleh penduga parameter model AR(p) dapat menyelesaikan penduga *Yule Walker* yaitu:

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Dengan cara yang sama pada metode momen, diperoleh penduga parameter model AR(1) yaitu:

$$\hat{\phi}_1 = \hat{\rho}_1,$$

dan penduga parameter model AR(2) yaitu:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2}{1 - \hat{\rho}_1^2} \quad \text{dan} \quad \hat{\phi}_2 = \frac{\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1^2}{1 - \hat{\rho}_1^2},$$

$$\text{dimana } \hat{\rho}_h = \frac{\hat{\gamma}_h}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=h+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}.$$

3.3. Metode Kemungkinan Maksimum

Misalkan $\{\tilde{X}_t\}$ adalah deret waktu stasioner. Didefinisikan model AR(p) yaitu

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{X}_{t-p} + Z_t; \quad Z_t \sim WN(0, \sigma^2). \quad (3.12)$$

Karena $\tilde{X}_t = X_t - \mu$, persamaan (3.12) dapat ditulis juga sebagai berikut:

$$X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \phi_2 (X_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p (X_{t-p} - \mu) + Z_t, \quad (3.13)$$

sehingga didapatkan JKSnya yaitu

$$S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p) = \sum_{t=p+1}^n Z_t^2 = \sum_{t=p+1}^n [(X_t - \mu) - \phi_1 (X_{t-1} - \mu) - \cdots - \phi_p (X_{t-p} - \mu)]^2$$

Karena distribusi proses *White Noise* diketahui, maka penduga kemungkinan maksimum bagi parameter AR(p) dapat diperoleh dari distribusi ini. Proses *White Noise* $\{Z_t\}$ merupakan deret dari peubah acak yang saling bebas dan mengikuti distribusi tertentu yang identik dengan $E(Z_t) = 0$ serta $Var(Z_t) = \sigma^2$ [4], sehingga fungsi kepekatan peluang dari $\{Z_t\}$ adalah:

$$f(z_t | \mu, \underline{\phi}, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(Z_t)^2},$$

dan fungsi kemungkinan dari $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ adalah:

$$L(\mu, \underline{\phi}, \sigma^2 | \mathbf{z}) = \prod_{t=1}^n f(z_1, z_2, \dots, z_n | \mu, \underline{\phi}, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n z_t^2}.$$

Logaritma dari fungsi kemungkinan di atas adalah:

$$\ln L(\mu, \underline{\phi}, \sigma^2 | \mathbf{z}) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p)}{2\sigma^2}$$

dengan $S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p)$ dinyatakan pada Persamaan (3.14).

Bila diperhatikan, parameter $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ hanya dimuat pada $S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p)$, sehingga untuk memaksimumkan fungsi $\ln L(\mu, \underline{\phi}, \sigma^2 | \mathbf{z})$ dapat dicapai jika $S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p)$ adalah minimum. Jika diperhatikan lagi, bahwa $S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p)$ ini sama dengan fungsi JKS yang diperoleh pada metode kuadrat terkecil, sehingga penduga kemungkinan maksimum dapat diperoleh dengan cara yang serupa dengan metode kuadrat terkecil, yaitu dengan menyelesaikan persamaan di bawah ini.

$$\frac{\partial}{\partial \mu} S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p) = 0, \quad (3.15)$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (3.16)$$

Dengan cara yang sama pada metode kuadrat terkecil, diperoleh penyelesaian dari Persamaan (3.15) sebagai berikut:

$$\hat{\mu} = \bar{X}.$$

Penyelesaian dari Persamaan (3.16) terhadap $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ diperoleh penduga sistem persamaan *Yule Walker* dan dapat diperoleh penduga AR(p) dengan menyelesaikan (3.17).

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Adapun penyelesaian dari (3.17) sama dengan metode sebelumnya, dimana diperoleh penduga parameter AR(1) yaitu:

$$\hat{\phi}_1 = \hat{\rho}_1,$$

dan penduga parameter AR(2) adalah:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2}{1 - \hat{\rho}_1^2} \quad \text{dan} \quad \hat{\phi}_2 = \frac{\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1^2}{1 - \hat{\rho}_1^2},$$

$$\text{dimana } \hat{\rho}_h = \frac{\hat{\gamma}_h}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=h+1}^n (X_t - \bar{X})(X_t - h - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}.$$

3.4. Penerapan Data

Contoh 1.

Data yang digunakan adalah data hipotetik atau data fiktif [6]. Data tersebut telah diidentifikasi dengan memplotkan fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsialnya sehingga digolongkan kedalam AR(1). Adapun hasil perhitungannya adalah

$$\bar{X} = 237,9167, \quad \hat{\gamma}_0 = 2891,5, \quad \hat{\gamma}_1 = 1437,15,$$

sehingga diperoleh penduga dari AR(1) adalah

$$\hat{\phi}_1 = \hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0} = \frac{1437,15}{2891,5} = 0,497.$$

Jadi, berdasarkan hasil di atas, dapat dinyatakan model AR(1) sebagai berikut:

$$\tilde{X}_t = 0,497\tilde{X}_{t-1} + Z_t.$$

dengan Z_t adalah proses *White Noise*.

Contoh 2.

Data yang digunakan adalah data total jumlah perminggu dari penggunaan pinjaman di cabang lokal dari bank nasional untuk 2 tahun terakhir [7]. Diduga bahwa

ada hubungan antara jumlah pinjaman minggu sekarang dan jumlah penggunaan pinjaman minggu sebelumnya. Hubungan model akan menolong pimpinan bank untuk perencanaan minggu ke depannya melalui peramalan yang dapat dipercaya. Data diidentifikasi dalam keadaan stasioner dan membentuk model AR(2), dimana diperoleh dengan memplotkan fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsialnya. Hasil perhitungannya adalah

$$\bar{X} = 67,06731, \quad \hat{\gamma}_0 = 58,73586, \quad \hat{\gamma}_1 = 27,12038, \quad \hat{\gamma}_2 = 31,21452,$$

sehingga diperoleh

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0} = 0,462 \quad \text{dan} \quad \hat{\rho}_2 = \frac{\hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_0} = 0,531.$$

Jadi penduga dari parameter AR(2) adalah

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2}{1 - \hat{\rho}_1^2} = 0,276 \quad \text{dan} \quad \hat{\phi}_2 = \frac{\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1^2}{1 - \hat{\rho}_1^2} = 0,464$$

sehingga hubungan model yang terbentuk adalah

$$\tilde{X}_t = 0,276\tilde{X}_{t-1} + 0,464\tilde{X}_{t-2} + Z_t.$$

dengan Z_t adalah proses *White Noise*.

4. Penutup

Model AR(p) adalah model regresi yang menghubungkan suatu nilai pengamatan dengan nilai pengamatan masa lalunya yang dinyatakan seperti persamaan berikut:

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{X}_{t-p}; \quad Z_t \sim WN(0, \sigma^2),$$

dengan $\tilde{X}_t = X_t - \mu$ dan $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ adalah parameternya.

Parameter dari AR(p) dapat diduga dengan menggunakan metode momen, metode kuadrat terkecil dan metode kemungkinan maksimum. Dari uraian ketiga metode tersebut menghasilkan penduga sistem persamaan *Yule Walker* dan nilai duga parameter diperoleh dengan menyelesaikan penduga sistem persamaan *Yule Walker* tersebut. Untuk penduga parameter model AR(1) diperoleh $\hat{\mu} = \bar{X}$ dan $\hat{\phi}_1 = \hat{\rho}_1$. Dan penduga dari parameter AR(2) adalah $\hat{\mu} = \bar{X}$, $\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2}{1 - \hat{\rho}_1^2}$ dan $\hat{\phi}_2 = \frac{\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1^2}{1 - \hat{\rho}_1^2}$.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Maiyastri, Ibu Hazmira Yozza, M.Si, Bapak Dr. Dodi Devianto, Bapak Yudiantri Asdi, M.Sc dan Ibu Rini Andaria, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Makridakis, S., S. C. Wheelwright, dan V. E. McGee. 1983. *Forecasting*, 2nd Edition, terj. U.S.Andriyanto dan A. Basith. Jakarta: Erlangga
- [2] Kirchgassner, G dan J. Wolters.2007. *Introduction to Modern Time Series Analysis*. Berlin: Springer-Verlag
- [3] Wei, W.W.S. 1964. *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. California: Addison-Wesley Publishing Company
- [4] Pankratz, A. 1994. *Forecasting with Univariate Box-Jenkins Models*. Canada: John and Wiley Sons, Inc
- [5] Bain,L.J. dan M. Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics* Second Edition. California:Duxbury Press
- [6] Tanpa nama. Tanpa Tahun. ARIMA. daps.bps.go.id/file-artikel/77/arima.pdf, Diakses pada 23 Juni 2014
- [7] Montgomery, D.C.,C.L.Jennings dan M.Kulahci.2007.*Introduction to time series analysis and forecasting*.Canada:John and Wiley Sons, Inc.
- [8] Brockwel,P.J. dan A.Davis .2001. *Introduction to Time Series and Forecasting*. USA: Springer
- [9] Suyitno. 2011. Pengestimasian parameter model autoregresif pada analisis deret waktu univariat.**ISSN 1412-498X** :117-132