Jurnal Matematika UNAND
Vol. **3** No. **4** Hal. 49 – 53
ISSN : 2303–291X

BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF KEMBANG API $F_{n,2}$ DAN $F_{n,3}$ DENGAN $n \geq 2$

ANDRE SAPUTRA
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
andre_saputra_match09@yahoo.com

Makalah ini mengkaji kembali paper [2] tentang penentuan bilangan kromatik lokasi untuk graf kembang api $F_{n,k}$, dimana $k = 2, 3$ dan $n \geq 2$.

Kata Kunci: Pewarnaan kromatik lokasi, bilangan kromatik lokasi, graf kembang api

1. Pendahuluan

Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$ dengan c merupakan suatu pewarnaan terhadap titik-titik di G. Misal $\prod = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah partisi terurut dari $V(G)$ berdasarkan suatu pewarnaan titik. Representasi v terhadap $\prod$ disebut kode warna dari v, dinotasikan $c_{\prod}(v))$, adalah vektor dengan panjang-k,

$$(d(v, C_1), d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k)),$$

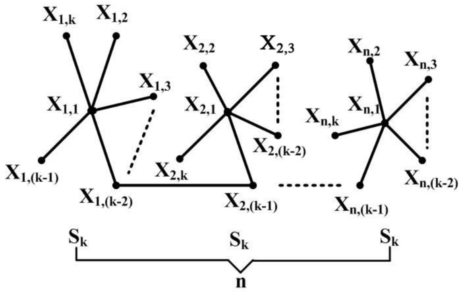
dimana $d(v, C_i) = \min\{d(v, x)|x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika untuk setiap dua titik yang berbeda u, v dalam G, $c_{\prod}(u) \neq c_{\prod}(v)$, maka c disebut sebagai pewarnaan kromatik lokasi (*locating-chromatic coloring*) dari G. Pewarnaan lokasi dengan warna yang minimum disebut pewarnaan lokasi minimum, dan kardinalitas dari himpunan yang memuat pewarnaan lokasi minimum disebut bilangan kromatik lokasi (*locating chromatic number*) dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Graf bintang S_k adalah graf yang terdiri dari k buah titik, dengan satu titik berderajat $k-1$, yang dinamakan titik pusat, serta $k-1$ titik berderajat satu, dinamakan daun. Graf kembang api (*firecracker graph*) $F_{n,k}$ adalah graf yang diperoleh dari n buah graf bintang S_k dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap S_k melalui sebuah lintasan. Pada tulisan ini akan dikaji kembali mengenai penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf kembang api $F_{n,k}$ untuk $k = 2$ dan $k = 3$ dengan $n \geq 2$, seperti yang telah diperoleh dalam [2].

Ilustrasi graf Kembang Api $F_{n,k}$ dapat dilihat pada Gambar berikut:

2. Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf Kembang Api

Pada Teorema 1 berikut diperoleh bilangan kromatik lokasi untuk graf Kembang Api $F_{n,k}$ untuk nilai k tertentu.

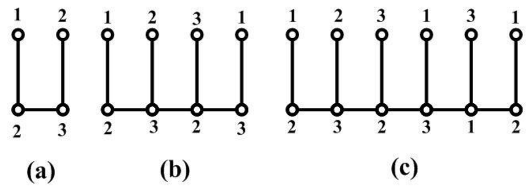


Gambar 1. Graf kembang api $F_{n,k}$

Teorema 2.1. [2] *Untuk $k = 2$ dan $k = 3$, diperoleh*

$$\chi_L(F_{n,k}) = \begin{cases} 3, & \textit{jika } 2 \leq n < 7, \\ 4, & \textit{jika } n \geq 7. \end{cases} \tag{2.1}$$

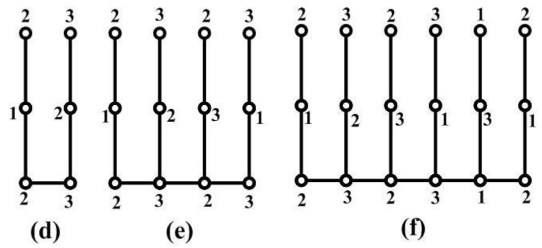
Bukti. Pembuktian dilakukan dengan melihat dua kasus berikut.
Kasus 1. $2 \leq n < 7$.
Untuk menunjukkan bahwa jika $2 \leq n < 7$ maka $\chi_L(F_{n,k}) = 3$, diberikan pewarnaan lokasi seperti yang tertera pada Gambar 2 – Gambar 5. Cara pewarnaan pada Gambar 2 dan Gambar 3 berbeda dengan cara pewarnaan pada Gambar 4 dan Gambar 5. Pada Gambar 4 dan Gambar 5, cara pewarnaan c untuk $F_{3,2}$ dan $F_{3,3}$, titik yang berwarna 2 yang terletak paling kanan harus diganti dengan warna 1. Demikian juga untuk $F_{5,2}$ dan $F_{5,3}$, titik berwarna 3 yang terletak paling kanan harus diganti dengan warna 2.



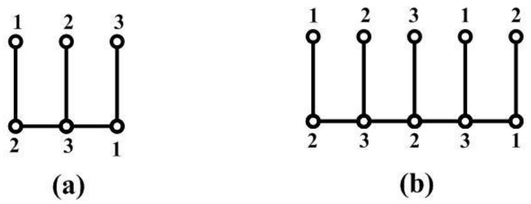
Gambar 2. Pewarnaan lokasi minimum dari (a) $F_{2,2}$, (b) $F_{4,2}$, (c) $F_{6,2}$

Kasus 2. $n \geq 7$.
Pertama-tama, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(F_{n,k}) \geq 4$ untuk $k = 2$ dan $k = 3$ dan $n \geq 7$. Andaikan terdapat pewarnaan lokasi dengan tiga warna pada $F_{n,k}$ tersebut. Akan ditunjukkan bahwa terdapat tepat tiga titik dominan di $F_{n,k}$ tersebut. Karena untuk $n \geq 7$ dan $k = 2$ dan $k = 3$, $F_{n,k}$ bukan lintasan, maka $F_{n,k}$ sedikitnya mempunyai dua titik dominan. Andaikan terdapat dua titik dominan di $F_{n,k}$, namakan x dan y. Maka terdapat lintasan *clear* ganjil dari x ke y, misalnya $(x = p_1, p_2, \cdots, p_r = y)$, dengan r genap. Pandang tiga kasus berikut.

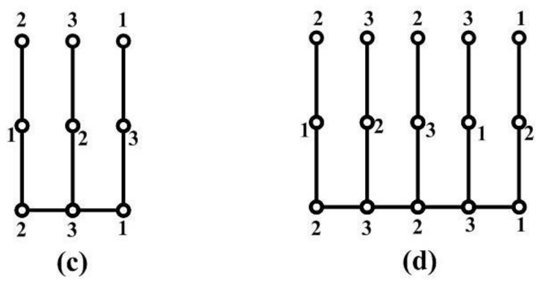
(1) Jika derajat x dan y adalah 2, maka untuk $F_{n,2}$, dua tetangga dari p_2 (kecuali



Gambar 3. Pewarnaan lokasi minimum dari (d) $F_{2,3}$, (e) $F_{4,3}$, (f) $F_{6,3}$



Gambar 4. Pewarnaan lokasi minimum dari (a) $F_{3,2}$, (b) $F_{5,2}$



Gambar 5. Pewarnaan lokasi minimum dari (c) $F_{3,3}$, (d) $F_{5,3}$

x) akan mempunyai kode warna yang sama, suatu kontradiksi. Untuk $F_{n,3}$, jika $r \leq 6$ dan v (kecuali p_{r-2}) adalah suatu titik berderajat 3 yang bertetangga dengan p_{r-1}, maka dua tetangga dari v (kecuali p_{r-1}) akan mempunyai kode warna yang sama, suatu kontradiksi. Jika $r > 6$ maka dua tetangga dari p_3 (kecuali p_2) akan mempunyai kode warna yang sama, suatu kontradiksi.

(2) Sekarang, pandang kasus untuk derajat x adalah 2 dan derajat y adalah 3. Misalkan z adalah suatu titik berderajat 3 dan bertetangga dengan y (kecuali p_{r-1}). Pandang dua tetangga dari z (kecuali y). Untuk $F_{n,k}$ dengan $k = 2$ dan $k = 3$, jika $r \leq 4$, maka kode warna dari kedua tetangga tersebut akan sama, suatu kontradiksi. Untuk $F_{n,2}$, jika $r > 4$, maka kode warna dari dua tetangga p_2 (kecuali x) akan sama. Sedangkan untuk $F_{n,3}$, kode warna dari dua tetangga p_{r-1} (kecuali y) akan sama, suatu kontradiksi.

(3) Pandang derajat dari x dan y adalah 3. Asumsikan bahwa y bertetangga dengan

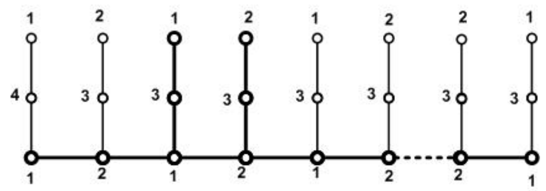
titik z yang berderajat 3. Untuk $F_{n,k}$ dan $k = 2$ dan $k = 3$, jika $r = 2$ maka dua tetangga dari z (kecuali y) akan mempunyai kode warna yang sama, suatu kontradiksi. Jika $r > 2$ maka dua tetangga dari x akan mempunyai kode warna yang sama, suatu kontradiksi. Akibatnya, jika $\chi_L(F_{n,k}) = 3$, $n \geq 7$ dan $k = 2$ dan $k = 3$, maka tepat mempunya tiga titik dominan.

Karena $G \cong F_{n,k}$ untuk $k = 2$ dan $k = 3$ dan $n \geq 7$ mempunyai tiga titik dominan, maka ketiga titik dominan tersebut terletak pada sebuah lintasan P, misalkan $P : x = p_1, p_2, \cdots, p_t = y, \cdots, p_r = z$, dengan x, y, z adalah titik-titik dominan.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $k = 2$ dan $k = 3$ dan $n \geq 7$, $\chi_L(F_{n,k}) \leq 4$. Labeli semua daun di $F_{n,2}$ dengan $l_1, l_2, \cdots, l_n$. Titik yang bertetangga dengan daun l_i, dinotasikan dengan x_i, untuk $1 \leq i \leq n$. Selanjutnya, definisikan suatu 4-pewarnaan pada $F_{n,2}$ sebagai berikut.

- $c(x_i) = \begin{cases} 1, \text{ jika } i \text{ ganjil}, \\ 2, \text{ jika } i \text{ genap}. \end{cases}$
- $c(l_1) = 4$,
- $c(l_i) = 3, i \geq 2$.

Dari pendefinisian 4-pewarnaan pada $F_{n,2}$ diperoleh kode warna dari semua titik berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi pada $F_{n,2}$, $n \geq 7$.



Gambar 6. Pewarnaan lokasi minimum dari $F_{n,3}$ untuk $n \geq 7$

Pandang graf $F_{n,3}$ untuk $n \geq 7$. Misalkan $V(F_{n,3}) = \{x_i, m_i, l_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ dan $E(F_{n,3}) = \{x_i x_{i+1} \mid i = 1, 2, \cdots, n-1\} \bigcup \{x_i m_i, m_i l_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$.

Definisikan 4-pewarnaan pada $F_{n,3}$ sebagai berikut:

- $c(x_i) = c(l_i) = \begin{cases} 1, \text{ jika } i \text{ ganjil}, \\ 2, \text{ jika } i \text{ genap}, \end{cases}$
- $c(m_1) = 4$,
- $c(m_i) = 3, i \geq 2$.

Misalkan c adalah suatu pewarnaan pada graf $F_{n,3}$, dengan $C = \{1, 2, 3, 4\}$ adalah himpunan warna pada graf $F_{n,3}$ seperti terlihat pada **Fig.7**. Kode warna dari titik-titik $F_{n,3}$ terhadap $\prod = \{x_i, m_i, l_i\}$ adalah sebagai berikut.

Kode warna pada $F_{n,3}$ untuk m_i:

- $c_{\prod}(m_1) = (1, 2, 3, 0)$.
- $c_{\prod}(m_i) = (2, 1, 0, i + 1)$ untuk i genap.

- $c_{\prod}(m_i) = (1, 2, 0, i + 1)$ untuk $i \geq 3$ ganjil.

Kode warna pada $F_{n,3}$ untuk x_i:

- $c_{\prod}(x_1) = (0, 1, 2, 1)$.
- $c_{\prod}(x_i) = (1, 0, 1, i)$ untuk i genap.
- $c_{\prod}(x_i) = (0, 1, 1, i)$ untuk $i \geq 3$ ganjil.

Kode warna pada $F_{n,3}$ untuk l_i:

- $c_{\prod}(l_1) = (0, 3, 4, 1)$.
- $c_{\prod}(l_i) = (3, 0, 1, i + 2)$ untuk i genap.
- $c_{\prod}(l_i) = (0, 3, 1, i + 2)$ untuk $i \geq 3$ ganjil.

Karena kode warna dari setiap titik tersebut berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(F_{n,3}) \leq 4$, dengan $n \geq 7$ untuk $k = 2$ dan $k = 3$. Dari **(i)** dan **(ii)** dapat diperoleh bahwa $\chi_L(F_{n,3}) = 4$, dengan $n \geq 7$ untuk $k = 2$ dan $k = 3$. $\square$

3. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Budi Rudianto, M.Si, Bapak Narwen, M.Si, Bapak Efendi M.Si dan Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Asmiati, H. Assiyatun and E. T. Baskoro. 2011. Locating-chromatic number of amalgamation of stars, *ITB Journal of Science.* **1**: 1 – 8

[2] Asmiati, H. Assiyatun, E. T. Baskoro, D. Suprijanto, R. Simanjuntak and S. Uttunggadewa. 2012. The locating-chromatic number of firecracker graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences* **63**(1), 11 – 23

[3] Buckey, F dan Lewinter, M. 2003. *A Friendly Introduction to Graph Theory.* Prentice Hall, New Jersey.

[4] Chartrand, G dan O.R. Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory.* McGraw-Hill,Inc. Unites States.

[5] Chartrand, G.,dkk. 2002. The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bull Inst. Combin. Appl.* **36**: 89 – 101

[6] Chartrand, G.,dkk. 2003. Graphs of Order n with Locating-Chromatic Number $n - 1$. *Discrete Math.* **269**: 65 – 79

[7] Chartrand, G.,dkk. 1998. On the Partition Dimension of Graph, *Congressus Numerantium* **130**, 157 – 168

[8] Hartsfield, N. dan G. Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction, Revised and Augmented.* Academic Press: San Diego.

[9] I. Javaid and S.Shokat. 2008. On the Partition Dimension of Some Wheel Related Graphs, *Journal of Prime in Mathematics.* **4**, 154 – 164

[10] R.Marinescu-Ghemeci and I.Tomescu. 2010. On Star Partition Dimension of Some Generalized Gear Graph, *Bull. Math. Soc. Sci. Roumanie Tome.* **53** (101), 261 – 268