Jurnal Matematika UNAND
Vol. **3** No. **4** Hal. 54 – 57
ISSN : 2303–291X

PELABELAN TOTAL SISI AJAIB PADA GRAF PETERSEN $P(n, 1)$ UNTUK n GANJIL $(n \geq 3)$ DENGAN KONSTANTA $k = \frac{1}{2}(11n + 3)$ ATAU $k = \frac{1}{2}(15n + 3)$

RIDRA MELISA
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
ridramelisa@gmail.com

Abstrak. Misal terdapat graf $G = (V, E)$ dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan total pada sisi-ajaib pada G adalah suatu pemetaan bijektif $\lambda : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, |V(G)| + |E(G)|\}$ yang mempunyai sifat bahwa untuk setiap sisi $\{x, y\}$ di G berlaku $\lambda(x) + \lambda(\{x, y\}) + \lambda(y) = k$, untuk bilangan bulat konstanta k, konstanta k disebut angka ajaib *(konstanta ajaib)* graf G. Dalam tugas akhir ini, akan ditunjukkan pelabelan total sisi ajaib pada graf petersen $P(n, 1)$ untuk n ganjil $(n \geq 3)$ dengan konstanta $k = \frac{1}{2}(11n + 3)$ atau $k = \frac{1}{2}(15n + 3)$.

Kata Kunci: Graf Lintasan, Konstanta Ajaib, Pelabelan total (a, d)-Sisi Ajaib

1. Pendahuluan

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$. Suatu graf $G = (V, E)$ dengan $V(G)$ dan $E(G)$ berturut - turut adalah himpunan titik dan himpunan sisi pada graf G.Banyaknya titik pada G dinotasikan sebagai $|V(G)| = p$ dan sementara banyaknya sisi pada G dinotasikan $|E(G)| = q$. Pelabelan (*labeling*) pada suatu graf adalah pemetaan atau dari setiap elemen graf ke bilangan bulat positif, yang mana bilangan tersebut disebut dengan **label**. Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan titik (atau himpunan sisi), maka pelabelannya disebut **pelabelan titik** (atau **pelabelan sisi**). Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan titik dan himpunan sisi, maka pelabelannya disebut **pelabelan total**.

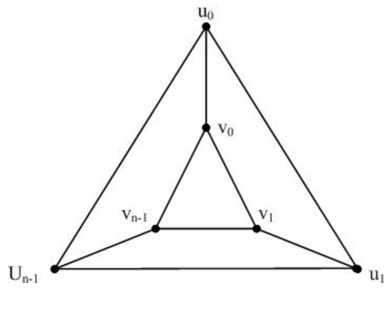
Pelabelan total sisi-ajaib pada graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ adalah suatu pemetaan λ bijektif $\lambda : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dengan sifat bahwa untuk setiap uv di G berlaku, $\lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v) = k$, untuk suatu konstanta tetap k.

2. Pelabelan Total Sisi Ajaib Pada Graf Petersen $P(n, 1)$ Untuk n Ganjil $(n \geq 3)$

Pelabelan total sisi ajaib pada graf Petersen yang diperumum $P(n, 1)$ dengan n ganjil $(n \geq 3)$. Graf Petersen diperumum merupakan graf teratur berderajat tiga. $P(n, m)$ dimana nilai n menyatakan banyaknya titik luar (u_i) atau titik dalam

(v_i) (karena banyak titik luar sama dengan banyaknya titik dalam) dan nilai m menyatakan lompatan sisi dalam $(v_i v_{1+2})$, dimana $n \geq 3$ dan $1 \leq m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.
Graf Petersen diperumum memiliki

$$V(P(n,m)) = \{v_i | i = 0, 1, \cdots, n-1\} \cup \{u_i | i = 0, 1, \cdots, n-1\},$$
$$E(P(n,m)) = \{u_i u_{i+1} | i = 0, 1, \cdots, n-1\} \cup \{u_i v_i | i = 0, 1, \cdots, n-1\} \cup \{v_i v_{i+m} | i = 0, 1, \cdots, n-1\}.$$



Gambar 1. Graf Petersen $P(3,1)$.

Teorema 2.1. [*1*] *Untuk n ganjil $(n \geq 3)$, graf Petersen yang diperumum $P(n,1)$ mempunyai pelabelan total sisi-ajaib dengan konstanta ajaib $k = \frac{1}{2}(11n+3)$.*

Bukti. Definisikan pelabelan untuk semua titik dan semua sisi dari graf Petersen yang diperumum $P(n,1)$ berturut-turut adalah sebagai berikut:

Untuk pelabelan titik,

$$\lambda_1(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(4n-i+1), \text{ untuk } i \equiv 1 \ (mod\ 2), \\ \frac{1}{2}(3n-i+1), \text{ untuk } i \equiv 0 \ (mod\ 2). \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n-i), & \text{untuk } i \equiv 1 \ (mod\ 2),\ i \neq n, \\ n, & \text{untuk } i = n, \\ \frac{1}{2}(2n-i), & \text{untuk } i \equiv 0 \ (mod\ 2). \end{cases}$$

Untuk pelabelan sisi,

$$\lambda_1(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 2n+i+1, & \text{untuk } i \neq n, \\ 2n+1, & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

$$\lambda_1(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 4n+2, & \text{untuk } i = n, \\ 4n+1, & \text{untuk } i = n-1, \\ 4n+2+i, & \text{untuk lainnya.} \end{cases}$$

$$\lambda_1(u_i v_i) = \begin{cases} 3n+i+1, & \text{untuk } i \neq n, \\ 3n+1, & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

Sehingga untuk setiap i akan berlaku,

$$\begin{aligned}\lambda_1(u_i)+\lambda_1(u_iu_{i+1})+\lambda_1(u_{i+1}) &= \lambda_1(v_i)+\lambda_1(v_iv_{i+1})+\lambda_1(v_{i+1})\\ &= \lambda_1(u_i)+\lambda_1(u_iv_i)+\lambda_1(v_i)\\ &= \frac{1}{2}(11n+3).\end{aligned}$$

Karena berlaku $k=\lambda(u_i)+\lambda(u_iv_i)+\lambda(v_i)$, maka dapat ditentukan k sebagai berikut : $k=\lambda_1(u_i)+\lambda_1(u_iv_i)+\lambda_1(v_i)$, $i=n-1$, $i=0,1,2,\cdots,n-1$.

(i) Untuk $i=0$, dapat dituliskan

$$\begin{aligned}k &= \lambda_1(u_i)+\lambda_1(u_iv_i)+\lambda_1(v_i),\\ &= (\frac{1}{2}(3n-i+1))+(3n+i+1)+\frac{1}{2}(2n-i),\\ &= \frac{1}{2}(11n+3).\end{aligned}$$

(ii) Untuk $i=1$, dapat dituliskan

$$\begin{aligned}k &= \lambda_1(u_i)+\lambda_1(u_iv_i)+\lambda_1(v_i),\\ &= (\frac{1}{2}(4n-i+1))+(3n+i+1)+\frac{1}{2}(n-i),\\ &= \frac{1}{2}(11n+3).\end{aligned}$$

(iii) Untuk $i=2$, dapat dituliskan

$$\begin{aligned}k &= \lambda_1(u_i)+\lambda_1(u_iv_i)+\lambda_1(v_i),\\ &= (\frac{1}{2}(3n-i+1))+(3n+i+1)+\frac{1}{2}(2n-i),\\ &= \frac{1}{2}(11n+3).\end{aligned}$$

(iv) Untuk $i=n-1$, dapat dituliskan

$$\begin{aligned}k &= \lambda_1(u_i)+\lambda_1(u_iv_i)+\lambda_1(v_i),\\ &= (\frac{1}{2}(3n-i+1))+(3n+i+1)+\frac{1}{2}(2n-i),\\ &= \frac{1}{2}(11n+3).\end{aligned}$$

Terbukti bahwa dari (i),(ii),(iii), dan (iv) diperoleh $\lambda_1(u_i)+\lambda_1(u_iv_i)+\lambda_1(v_i)=\frac{1}{2}(11n+3)$ untuk $0\le i\le n-1$. Sehingga terbukti k adalah konstanta pelabelan total sisi ajaib. □

Teorema 2.2. [*1*] *Untuk* n *ganjil* $(n\ge 3)$, *Graf Petersen yang diperumum* $P(n,1)$ *mempunyai pelabelan total sisi-ajaib dengan konstanta ajaib* $k=\frac{1}{2}(15n+3)$.

Bukti. Dapat menggunakan langkah pembuktian pada Teorema 2.1. □

3. Kesimpulan

Graf Petersen adalah graf reguler yang mempunyai derajat titik 3 pada semua titiknya. Graf Petersen diperumum dinyatakan sebagai $P(n,m)$ dengan nilai n menyatakan banyaknya titik luar (sama dengan banyaknya titik dalam) dan nilai m menyatakan lompatan sisi dalam, dimana $n \geq 3$ dan $1 \leq m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Graf Petersen diperumum $P(n,1)$, dengan himpunan titik $V[P(n,1)] = \{u_i | i = 0, 1, \cdots, n-1\} \cup \{v_i | i = 0, 1, \cdots, n-1\}$ dan himpunan sisi $E[P(n,1)] = \{u_i u_{i+1} | i = 0, 1, \cdots, n-1\} \cup \{v_i v_{i+1} | i = 0, 1, \cdots, n-1\} \cup \{u_i v_i | i = 0, 1, \cdots, n-1\}$. Peabelan total sisi ajaib pada Graf Petersen merupakan pelabelan total sisi-ajaib untuk n ganjil $(n \geq 3)$ dengan kontanta ajaib $k = \frac{1}{2}(11n+3)$ atau $k = \frac{1}{2}(15n+3)$.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Narwen M.Si, Bapak Bukti Ginting M.Si, Bapak Budi Rudianto M.Si, Ibu Dr. Yanita, Bapak Syafrudin M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Ngurah, A.A.G. Ngurah and E.T. Baskoro, On Magic and Antimagic Total Labeling of Generalized Petersen Graph, *Utilitas Math.* **67** : 1 – 5
[2] Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit Edisi 3.* Penerbit Informatika, Bandung.
[3] Chartrand, G. dan L. Lesniak. 1986. *Graph and Digraph* 3^{rd} Edition. California: Wadsworth, Inc.
[4] Markaban, 2004. *Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan.* Widyaiswara PPPG Matematika. Yogyakarta.
[5] M. Baca, Consecutive Magic Labeling of Generalized Petersen Graphs, *Utilitas Math.* **58**: 237 – 241
[6] Miler, Mirka. 2000. *Open Problems in Graph Teory : Labeling and Extremal Graph.* Posiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia X di Institut Teknologi Bandung, 17 – 20 Juli.
[7] W.D. Wallis, 2001 *Magic Graph,* Birkhuser, Boston-Basel-Berlin.