Jurnal Matematika UNAND
Vol. **3** No. **4** Hal. 96 – 103
ISSN : 2303–291X

MODEL DINAMIKA CINTA DENGAN MEMPERHATIKAN DAYA TARIK PASANGAN

SUCI RAHMA NURA, MAHDHIVAN SYAFWAN
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
sucirahmanura.rn@gmail.com

Abstrak. This article discusses a model of a love affair between two individuals by taking into account the effect of the appeal of each individual. There are three important things that must be considered in this model ; i.e, oblivion (the forgetting process), return (the pleasure of being loved), and instict (reaction to the partner's appeal). Some dynamical properties of the model and its interpretations are also elaborated in this article.

Kata Kunci: Dynamical system, partner's appeal, stability

1. Pendahuluan

Kajian tentang dinamika cinta digagas pertama kali oleh Strogatz [2] dengan tujuan untuk menarik mahasiswa dalam mempelajari kuliah sistem persamaan diferensial biasa. Strogatz menghubungkan sifat-sifat dinamik suatu sistem dengan suatu topik yang sudah ada di pikiran banyak mahasiswa, yaitu kisah cinta antara sepasang kekasih.

Meskipun model dinamika cinta pada awalnya berasal dari "keisengan" Strogatz saja, namun banyak peneliti lain yang kemudian mencoba mengembangkan model tersebut untuk kasus-kasus yang lebih realistis. Salah satu pengembangan model tersebut dilakukan oleh Rinaldi [3] dimana beliau memperhitungkan faktor daya tarik dari pasangan. Model ini beliau kembangkan untuk menjelaskan mengapa dua orang yang awalnya sangat berbeda dan tidak saling kenal dapat menjalin sebuah hubungan cinta. Kajian tentang model Rinaldi tersebut akan dieksplorasi kembali dengan lebih detail pada artikel ini.

2. Sistem Persamaan Diferensial dan Potret Fasa

Diberikan sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\dot{x_1} = ax_1 + bx_2, \qquad \dot{x_2} = cx_1 + dx_2, \tag{2.1}$$

atau dapat ditulis

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{2.2}$$

dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

dimana $x_i \equiv x_i(t)$ dan $\dot{x}_i$ berarti turunan x_i terhadap t.

Solusi dari sistem (2.2) dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t} \tag{2.3}$$

dengan

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix},$$

dimana r, s dan λ adalah suatu konstanta.

Substitusi persamaan (2.3) ke persamaan (2.2) menghasilkan

$$(\lambda I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{2.4}$$

Dengan demikian λ adalah nilai eigen dari matriks A dan $\mathbf{v}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Selanjutnya persamaan karakteristik dari matriks A diberikan oleh

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{2.5}$$

dengan $p = -(a + d)$ dan $q = ad - bc$. Solusi dari persamaan (2.5) diberikan oleh

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{2.6}$$

Terdapat beberapa kasus nilai eigen yang ditentukan oleh nilai entri-entri matriks A, yaitu a, b, c, dan d. Pada jurnal ini hanya akan ditinjau kasus : $b, c > 0$.

Kasus: $b, c > 0$.

Untuk kasus ini berlaku teorema berikut.

Teorema 2.1. *Jika $b, c > 0$ pada sistem (2.2), maka nilai eigen λ_1 dan λ_2 pada metriks* A *bernilai riil dengan $\lambda_2 < \lambda_1$.*

Bukti. Pandang p dan q pada persamaan (2.5). Karena $b, c > 0$, maka

$$\begin{aligned} p^2 - 4q &= (-(a + d))^2 - 4(ad - bc) \\ &= a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4bc \\ &= a^2 + d^2 - 2ad + 4bc \\ &= (a - d)^2 + 4bc \\ &> 0. \end{aligned}$$

Karena $p^2 - 4q > 0$, maka nilai eigen λ_1 dan λ_2 pada persamaan (2.6) mestilah bernilai riil dengan $\lambda_2 < \lambda_1$. □

Khusus untuk kasus $p^2 > 4q$ dan $p, q > 0$ berlaku teorema berikut.

Teorema 2.2. *Jika $p^2 > 4q$ dan $p, q > 0$, maka $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.*

Bukti. Dari Teorema 2.1, jelas bahwa $p^2 > 4q$ mengakibatkan $\lambda_2 < \lambda_1$. Selanjutnya, karena $p, q > 0$, maka

$$4q > 0 \Leftrightarrow p^2 - 4q < p^2 \Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 4q} < p \Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 4q} - p < 0. \tag{2.7}$$

Dari hubungan terakhir, jelas bahwa $\lambda_1 < 0$. Jadi $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. □

3. Kestabilan Sistem Linier Nonhomogen

Diberikan suatu sistem linier nonhomogen berikut :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}, \tag{3.1}$$

dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Definisi 3.1. [4] *Untuk sistem (3.1), titik* $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *dikatakan* ***titik kesetimbangan*** *jika*

$$A\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Definisi 3.2. [4]*Untuk sistem (3.1), titik* $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *dikatakan* ***titik kesetimbangan*** *jika*

$$A\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Teorema 3.3. [4] *Sistem (3.1) stabil asimtotik jika dan hanya jika semua nilai eigen dari A mempunyai bagian riil negatif. Lebih lanjut, sistem (3.1) tidak stabil jika dan hanya jika terdapat nilai eigen yang bagian riilnya positif.*

Teorema 3.4. [7] *Sistem (3.1) adalah positif jika dan hanya jika A adalah suatu matriks Metzler dan* $\mathbf{b}$ *adalah vektor yang memiliki entri positif.*

4. Konstruksi Model

Model yang dikembangkan pada artikel ini adalah suatu sistem dinamik yang terdiri dari dua variabel keadaan x_1 dan x_2, dimana x_1 menyatakan ukuran perasaan individu pertama terhadap individu kedua dan x_2 menyatakan ukuran perasaan invidu kedua terhadap individu pertama. Nilai positif pada x_i menandakan perasaan positif (mulai dari persahabatan hingga cinta berat), sedangkan nilai negatif menandakan perasaan negatif (mulai dari bertentangan hingga benci sekali). Apabila tidak memiliki perasaan apapun, maka hal itu ditandai dengan $x_i = 0$.

Ada tiga hal penting yang diperhatikan dalam model ini, yaitu *oblivion, return* dan *instict. Oblivion* adalah suatu keadaan yang dapat mengakibatkan berkurangnya ketertarikan atau perasaan cinta seseorang terhadap pasangannya. Oblivion ini disebut juga proses melupakan. *Return* berkaitan dengan perasaan cinta yang tumbuh karena pasangannya mencintainya. Semakin besar cinta yang dimiliki pasangannya terhadap dirinya maka akan membuat perasaan cintanya kepada pasangannya semakin besar pula. Sedangkan *instinct* berkaitan dengan perasaan cinta yang disebabkan oleh daya tarik yang dimiliki pasangannya, seperti fisik, kepribadian, kecerdasan, kekayaan, dan lain-lain.

Adapun asumsi pada model ini adalah :

(1) Hubungan cinta antara dua individu hanya dipengaruhi oleh kedua individu tersebut (keikutsertaan pihak lain diabaikan).
(2) Daya tarik yang dimiliki seseorang, seperti sifat, kepribadian, fisik, kecerdasan, kekayaan dan lain-lain diasumsikan bersifat konstan.
(3) Sinergisme (interaksi antara dua individu) diabaikan, artinya *oblivion* dan *return* hanya tergantung pada satu variabel.

(4) Mekanisme cinta (*oblivion, return* dan *instict*) dianggap saling bebas dan dimodelkan oleh fungsi linier.

Berdasarkan penjelasan dan asumsi di atas, maka dinamika cinta yang akan dibahas dimodelkan oleh sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= -\alpha_1 x_1(t) + \beta_1 x_2(t) + \gamma_1 A_2, \\ \dot{x_2}(t) &= -\alpha_2 x_2(t) + \beta_2 x_1(t) + \gamma_2 A_1, \end{aligned} \tag{4.1}$$

dimana $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i,\ A_i$, adalah konstanta positif. Adapun $\alpha_i x_i(t), \beta_i x_i(t)$ dan $\gamma_i A_i$ pada sistem di atas berturut-turut menjelaskan aspek *oblivion, return* dan *instict.* Jadi masing-masing individu diidentifikasi oleh empat parameter, yaitu besarnya proses melupakan (α_i), besarnya reaksi terhadap cinta pasangannya (β_i), besarnya reaksi terhadap daya tarik pasangannya (γ_i), dan besarnya daya tarik pasangan yang diasumsikan konstan (A_i).

Model (4.1) dapat ditulis ulang dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{4.2}$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \gamma_1 A_2 \\ \gamma_2 A_1 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa matriks A merupakan matriks Metzler dan vektor $\mathbf{b}$ memiliki komponen positif. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 3.2, sistem (4.1) positif.

5. Sifat-sifat Model

Pada subbab ini akan dibahas empat sifat sederhana, tetapi menarik, dari model (4.1) [atau sistem (4.2)].

Sifat 1. *Sistem (4.2) tidak memiliki potret fasa pusat.*
Bukti. Karena $\alpha_i, \beta_i > 0$, maka menurut Teorema 4.1 nilai eigen λ_1 dan λ_2 dari matriks A bernilai riil atau dengan kata lain tidak bernilai imajiner murni maka sistem (4.2) tidak mungkin memiliki potret fasa pusat. □

Interpretasi. Kisah cinta yang dimodelkan oleh sistem (2.2) tidak mengalami proses siklik, artinya perasaan cinta yang dimiliki setiap pasangan akan naik atau turun menuju ke suatu nilai (hingga atau takhingga).

Selanjutnya sifat berikut memberikan syarat cukup untuk kestabilan sistem (4.2).

Sifat 2.

- Jika $\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 > 0$, maka sistem (4.2) stabil asimtotik,
- Jika $\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 < 0$, maka sistem (4.2) tidak stabil.

Bukti. Perhatikan bahwa nilai eigen λ_1 dan λ_2 dari matriks A pada sistem (4.2) diberikan oleh

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

dimana $p = -(-\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$ dan $q = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2$. Diketahui $\alpha_i, \beta_i > 0$, sehingga $p > 0$ dan $p^2 - 4q > 0$.
(i) Jika $q = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 > 0$, maka berdasarkan Teorema 2.2, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Akibatnya, berdasarkan Teorema 3.2, sistem (4.2) stabil asimtotik.
(ii) Jika $q = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 < 0$, maka

$$\begin{aligned} -4q > 0 &\Leftrightarrow p^2 - 4q > p^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 4q} > p \text{ (karena } p > 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 > 0. \end{aligned}$$

Karena nilai eigen $\lambda_1 > 0$, maka menurut Teorema 3.2, sistem (4.2) tidak stabil. □

Interpretasi. Sifat 2 menjelaskan bahwa kedua pasangan akan memiliki perasaan yang terbatas jika rata-rata (geometrik) dari koefisien reaksi terhadap perasaan cinta yang dimiliki pasangan ($\sqrt{\beta_1\beta_2}$) lebih kecil daripada rata-rata (geometrik) dari proses melupakan ($\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$). Jika hal ini tidak berlaku, maka perasaan yang dimiliki kedua pasangan menjadi tidak terbatas.

Tentu saja kasus dengan perasaan yang tidak terbatas menjadi tidak realistik. Dengan demikian pembahasan selanjutnya diasumsikan memenuhi syarat berikut:

$$\beta_1\beta_2 < \alpha_1\alpha_2. \tag{5.1}$$

Selanjutnya sifat berikut menjelaskan tentang titik kesetimbangan dari sistem (4.2).

Sifat 3. *Titik kesetimbangan* $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x_1}, \bar{x_2})$ *dari sistem (4.2) bernilai positif, yaitu* $\bar{x_i} > 0$ *untuk* $i = 1, 2$.

Bukti. Titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x_1}, \bar{x_2})$ dari sistem (4.2) dapat dihitung dari sistem persamaan

$$\begin{aligned} -\alpha_1 x_1(t) + \beta_1 x_2(t) + \gamma_1 A_2 = 0, \\ -\alpha_2 x_2(t) + \beta_2 x_1(t) + \gamma_2 A_1 = 0. \end{aligned}$$

Solusi sistem persamaan di atas untuk x_1 dan x_2 adalah

$$x_1(t) = \bar{x}_1 = \frac{\alpha_2\gamma_1 A_2 + \beta_1\gamma_2 A_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}, \qquad x_2(t) = \bar{x}_2 = \frac{\alpha_1\gamma_2 A_1 + \beta_2\gamma_1 A_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}. \tag{5.2}$$

Karena semua konstanta bernilai positif dan dari syarat (4.1), maka nilai $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ tentulah positif. □

Interpretasi. Jika dua individu bertemu untuk pertama kalinya pada saat $t = 0$, artinya mereka belum mempunyai perasaan apa-apa satu sama lain (yaitu

$x_i(0) = 0$), maka seiring berjalannya waktu kedua individu yang awalnya tidak saling kenal ini akan saling membentuk perasaan positif (yaitu $x_i(t) > 0$) yang menuju ke suatu nilai kesetimbangan yang positif.

Sifat 4. *Fungsi* $x_i(t)$, *dengan syarat awal* $x_i(0) = 0$, *monoton naik kuat, yaitu* $\dot{x}_i(t) > 0 \; \forall \; t$, *untuk* $i = 1, 2$.

Bukti. Perhatikan bahwa sistem (4.2) pada dasarnya sama dengan sistem (2.3.2) tetapi dengan menggeser semua titik sejauh $\bar{\mathbf{x}}$ positif. Dengan demikian potret fasa sistem (4.2) sama dengan potret fasa sistem (2.2) namun dengan menggeser titik kesetimbangannya ke suatu titik positif (katakanlah titik E) [lihat gambar 1]. Selanjutnya perhatikan bahwa $\dot{x}_1 = 0$ dan $\dot{x}_2 = 0$ berturut-turut memberikan garis lurus

$$l_1 \equiv x_2 = \frac{\alpha_1 x_1}{\beta_1} - \frac{\gamma_1 A_2}{\beta_1},$$

dan

$$l_2 \equiv x_2 = \frac{\beta_2 x_1}{\alpha_2} + \frac{\gamma_2 A_1}{\alpha_2}.$$

Kedua garis ini membagi daerah potret fasa atas 4 bagian [lihat Gambar 3.2.1] Perhatikan daerah I, yaitu yang dibatasi oleh

$$\frac{\alpha_1 x_1}{\beta_1} - \frac{\gamma_1 A_2}{\beta_1} < x_2 < \frac{\beta_2 x_1}{\alpha_2} + \frac{\gamma_2 A_1}{\alpha_2}, \tag{5.3}$$

dan

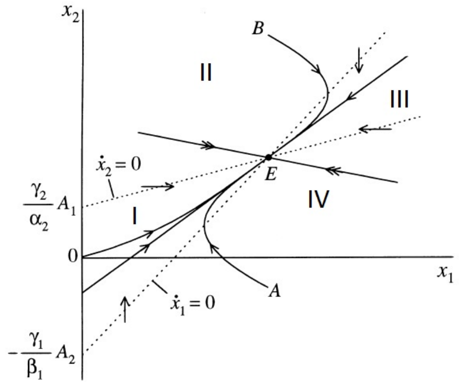
$$0 \leq x_1 < E. \tag{5.4}$$

Dari interval (5.3) berlaku

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1 x_1}{\beta_1} - \frac{\gamma_1 A_2}{\beta_1} < x_2 \quad &\text{dan} \quad x_2 < \frac{\beta_2 x_1}{\alpha_2} + \frac{\gamma_2 A_1}{\alpha_2} \\
\Leftrightarrow 0 < x_2 - \frac{\alpha_1 x_1}{\beta_1} + \frac{\gamma_1 A_2}{\beta_1} \quad &\text{dan} \quad 0 < -x_2 + \frac{\beta_2 x_1}{\alpha_2} + \frac{\gamma_2 A_1}{\alpha_2} \\
\Leftrightarrow 0 < \beta_1 x_2 - \alpha_1 x_1 + \gamma_1 A_2 \quad &\text{dan} \quad 0 < -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2 A_1 \\
\Leftrightarrow 0 < \dot{x}_1 \quad &\text{dan} \quad 0 < \dot{x}_2.
\end{aligned}$$

Jelas bahwa semua lintasan di daerah I memenuhi $\dot{x}_1 > 0$ dan $\dot{x}_2 > 0$. Jadi lintasan solusi yang dimulai dari $x_i(0) = 0$ selalu monoton naik kuat. □

Interpretasi. Misalkan terdapat dua individu yang pada awalnya tidak saling kenal sehingga belum mempunyai perasaan apa-apa satu sama lainnya (dalam hal ini $x_i(0) = 0$). Sifat 4 ini menjelaskan bahwa seiring berjalannya waktu, benih-benih cinta antara dua individu ini dapat muncul dan akan terus tumbuh bersemi menuju ke suatu titik kesetimbangan positif. Lebih lanjut, jika syarat awalnya tidak nol, artinya salah satu atau kedua individu tersebut pada awalnya memiliki perasaan tertentu kepada pasangannya, maka salah satu dari mereka bisa jadi pertama-tama



Gambar 1. Potret fasa dari sistem (4.2) [3]

.

mengalami penurunan rasa cinta, namun lama kelamaan rasa cinta itu dapat tumbuh kembali hingga mencapai titik kesetimbangan, atau sebaliknya. Sebagai contoh, misalkan pada awalnya individu 1 berada di titik kesetimbangan, namun di lain pihak individu 2, untuk suatu alasan, kehilangan ketertarikan terhadap individu 1. Akibatnya, individu 1 akan 'menderita' dalam selang waktu tertentu terlebih dahulu hingga pasangan tersebut mencapai titik kesetimbangan (lihat lintasan AE). Sebaliknya, jika ketertarikan individu 2 terhadap individu 1 pada mulanya melebihi titik kesetimbangan, maka hal itu akan membuat ketertarikan individu 1 terhadap individu 2 meningkat pula. Namun ketertarikan tersebut menurun kembali hingga mencapai titik kesetimbangan (lihat lintasan BE).

6. Penutup

Model dinamika cinta yang dibahas pada jurnal ini diberikan oleh :

$$\dot{x_1}(t) = -\alpha_1 x_1(t) + \beta_1 x_2(t) + \gamma_1 A_2,$$
$$\dot{x_2}(t) = -\alpha_2 x_2(t) + \beta_2 x_1(t) + \gamma_2 A_1,$$

dimana $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i,\ A_i$, adalah konstanta positif. Adapun $\alpha_i x_i(t), \beta_i x_i(t)$ dan $\gamma_i A_i$ pada sistem di atas berturut-turut menjelaskan aspek *oblivion, return* dan *instict.*

Beberapa sifat dinamik dari model di atas adalah :

(1) Sistem tidak memiliki potret fasa pusat.
(2) Sistem stabil asimtotik jika $\alpha_1\alpha_2 > \beta_1\beta_2$.
(3) Titik kesetimbangan sistem bernilai positif.
(4) Jika $x_i(0) = 0$, maka $\dot{x}_i(t) > 0$ untuk setiap t, dengan $i = 1, 2$.

Interpretasi yang dapat disimpulkan berdasarkan sifat-sifat di atas adalah :

(1) Kisah cinta antara dua individu pada model di atas tidak mengalami proses siklik.
(2) Perasaan kedua individu menuju ke suatu titik kesetimbangan jika rata-rata (geometrik) dari koefisien reaksi terhadap perasaan cinta yang dimiliki pasan-

gan ($\sqrt{\beta_1\beta_2}$) lebih kecil daripada rata-rata (geometrik) dari proses melupakan ($\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$).

(3) Titik kesetimbangan perasaan kedua individu bernilai positif.

(4) Dua individu yang pada awalnya tidak saling kenal (belum mempunyai perasaan apa-apa satu sama lainnya) dapat membentuk hubungan cinta yang terus tumbuh hingga mencapai titik kesetimbangan yang positif.

7. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Efendi, M.Si dan Ibu Riri Lestari, M.Si yang telah memberikan, masukan serta saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Diprima, C Richard. Boyce, William E. 2012. *Elementary Differential Equations 10th Edition*. New York: John Wiley and Sons

[2] Strogatz, H Steven. 1988. Love Affairs and Differential Equations. *Mathematic Magazine*. **61**: 35

[3] Rinaldi, Sergio. 1998. Love Dynamics: The Case of Linier Couples. *Applied Mathematics and Computation*. **95**: 181 − 192

[4] D. G. Luenberger. 1979. *Introduction to Dynamic Systems*. New York: John Wiley and Sons Inc.

[5] Farina, Lorenzo dan Sergio Rinaldi. 1963. *Positive Linear Systems Theory and Applications*: New York: John Wiley and Sons.

[6] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kedelapan-Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

[7] Leenheer. P. dan Aelyels. D. 2001. Stabilization of Positive Linear Systems. *Systems and Control Letters*. **44**: 259 − 271