Jurnal Matematika UNAND
Vol. **1** No. **1** Hal. 51 – 55
ISSN : 2303–291X

Pelabelan Total (a, d)-Sisi Antiajaib Super Pada Graf Kipas $\mathbb{F}_n, 2 \leq n \leq 6$

NOVALIA

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas Padang,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
novalia_moris22@yahoo.com,

Abstrak. Misalkan $G = (V(G), E(G))$. Maka fungsi bijektif $g : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, |V(G)| + |E(G)|\}$ disebut sebagai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib dari G jika himpunan bobot sisi dari semua sisi di G, $W = \{w(xy)|w(xy) = g(x) + g(y) + g(xy), \forall xy \in E(G)\}$, dapat dituliskan sebagai $W = \{a, a+d, \cdots, a+(|E(G)|-1)d\}$ Suatu pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib g disebut super jika $g(v(G)) = \{1, 2, \cdots, |V(G)|\}$. Pada makalah ini telah dikaji bahwa graf kipas dengan n titik mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super dengan $2 \leq n \leq 6$ dan $d \in \{0, 1, 2\}$.
Kata Kunci: *Graf kipas, pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super*

1 Pendahuluan

Graf yang dikaji pada tulisan ini adalah graf sederhana, yaitu graf yang tidak memuat loop dan sisi ganda. Suatu graf G [2] terdiri dari himpunan tak kosong yang berisikan himpunan V yang disebut dengan himpunan titik dan himpunan E yang berisikan himpunan bagian dari V yang disebut dengan sisi. Misalkan $|V(G)| = p$ dan $|E(G) = q$ adalah banyaknya titik dan banyaknya sisi di G. Dalam [1] dituliskan bahwa pelabelan dapat diartikan dengan pemetaan satu-satu dari unsur-unsur di graf ke himpunan bilangan asli yang dinamakan himpunan label. Jika domain dari fungsi adalah titik maka pelabelan disebut dengan pelabelan titik. Jika domainnya adalah sisi maka disebut dengan pelabelan sisi, dan jika domainnya titik dan sisi maka disebut dengan pelabelan total.

Untuk suatu sisi $e = xy$, bobot sisi $w(e)$ didefinisikan sebagai jumlah dari label sisi dan label kedua titik x dan y yang terkait dengan sisi tersebut. Suatu pelabelan dikatakan sebagai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib jika himpunan bobot sisi $V(G) = \{1, 2, \cdots, p\}$ disemua sisi di G adalah $\{a, a+d, \cdots, a+(q-1)d\}$ dimana $a > 0$ dan $d \geq 0$, dikatakan super jika $g(V(G)) = \{1, 2, \cdots, p\}$ dan $g(E(G)) = \{p + 1, p + 2, \cdots, p + q\}$.

Makalah ini merupakan tinjauan ulang dari rujukan pustaka [2]. Pada makalah ini penulis mengkaji kembali tentang pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib pada graf kipas $\mathbb{F}_n$, dengan $2 \leq n \leq 6$.

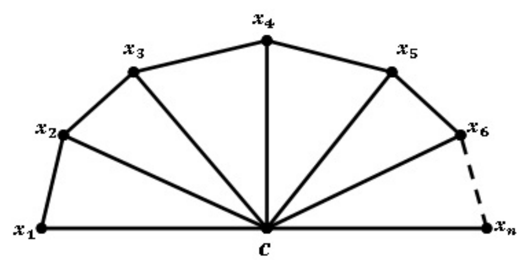
2 Pelabelan Total (a,d)-Sisi Antiajaib Super pada Graf Kipas $\mathbb{F}_n$

Graf kipas $\mathbb{F}_n$ adalah graf lintasan P_n yang setiap titiknya dihubungkan dengan titik pusat, misalkan titik pusat c. Misalkan n adalah bilangan bulat positif,

$n > 2$. Maka himpunan titik dan himpunan sisi graf kipas dapat dinotasikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(\mathbb{F}_n) &= \{c, x_1, x_2, .., x_n\} \\ E(\mathbb{F}_n) &= \{cx_i \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1} | 1 \leq n \leq n-1\} \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa banyaknya titik dan sisi dari $\mathbb{F}_n$ adalah $|V(\mathbb{F}_n)| = n+1$ dan $|E(\mathbb{F}_n)| = 2n-1$.



Gambar 1. Gambar graf kipas $\mathbb{F}_n$

Teorema 1. *Jika graf kipas $\mathbb{F}_n, n \geq 2$ adalah graf dengan pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib maka $d < 3$.*

Bukti. Misalkan $f : V(\mathbb{F}_n) \cup E(\mathbb{F}_n) \to \{1, 2, \cdots, 3n\}$ adalah pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib super. Maka himpunan bobot sisi graf kipas F_n adalah $W = \{a, a+d, \cdots, a+(2n-2)d\}$. Jumlah bobot sisi untuk semua sisi $\mathbb{F}_n$ adalah

$$\sum_{xy \in E(\mathbb{F}_n)} w(xy) = (2n-1)a + (n-1)(2n-1)d.$$

Pada pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib untuk graf kipas F_n ini, bobot sisi minimal adalah $1+2+(n+2) = n+5$. Sementara bobot sisi maksimal adalah $(n+1)+n+3n = 5n+1$. Karena $n+5+(2n-2)d \leq 5n+1$ maka haruslah $d \leq 2$ atau $d < 3$. $\square$

Lema 1. *Graf kipas $\mathbb{F}_n$ mempunyai pelabelan titik $(3,1)$-sisi antiajaib jika dan hanya jika $2 \leq n \leq 6$.*

Bukti. Misal $f : V(\mathbb{F}_n)$ adalah pelabelan titik $(a,1)$-sisi antiajaib. Karena $d = 1$ dan $|E(\mathbb{F}_n)| = 2n-1$, maka haruslah $a = 3$. Dapat dilihat dari tiga kasus berikut:

1. **Kasus 1**: Jika $f(c) = 1$, maka himpunan bobot sisi untuk sisi $\{cx_i | 1 \leq i \leq n\} = \{3, 4, \cdots, n+2\}$ dan $\{x_i x_{i+1}\} = \{n+3, n+4, \cdots, 2n+1\}$. Pada penjumlahan bobot sisi $\{n+3, n+4, \cdots, 2n+1\}$, diperoleh

$$f(x_1) + f(x_n) = \frac{4+5n-n^2}{2}.$$

Sehingga nilai n yang memenuhi adalah $n = 2$ atau $n = 3$.

2. **Kasus 2**: Jika $f(c) = n+1$, maka himpunan bobot sisi untuk sisi $\{cx_i | 1 \leq i \leq n\} = \{n+3, n+4, \cdots, 2n+1\}$ dan $\{x_i x_{i+1}\} = \{3, 4, \cdots, n+1\}$. Penjumlahan dari bobot sisi $\{3, 4, \cdots, n+1\}$ adalah

$$f(x_1) + f(x_n) = \frac{n^2 - n + 4}{2}$$

Sehingga nilai n yang memenuhi adalah $n = 2$ atau $n = 3$.
3. **Kasus 3**: Jika $f(c) = k, 1 < k < n+1$, maka label himpunan titik $\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$ dipartisi kedalam dua himpunan yang saling lepas $S_1 = \{1, 2, \cdots, k-1\}$ dan $S_2 = \{k+1, k+2, \cdots, n+1\}$. Dengan demikian terdapat salah satu sisi $\{x_i x_{i+1}\}$ sedemikian sehingga $w(x_i x_{i+1}) = 2k = s_1 + s_2$, dimana $s_1 \in S_1$ dan $s_2 \in S_2$. Himpunan bobot sisi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{3, 4, \cdots, k\} \\ W_2 &= \{n+k+2, n+k+3, \cdots, 2n+1\} \\ W_3 &= \{w(cx_i) : 1 \leq i \leq n\} = \{k+1, k+2, \cdots, n+k+1\}/\{2k\} \end{aligned}$$

Pada penjumlahan seluruh nilai dari himpunan S_1 adalah

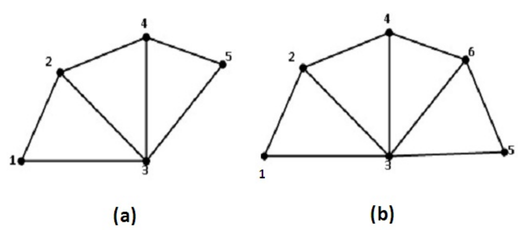
$$f(x_1) + s_1 = \frac{k^2 - 3k + 6}{2}.$$

Sehingga diperoleh $k = 3$ dan $k = 4$. Pada penjumlahan seluruh nilai titik di S_2 adalah

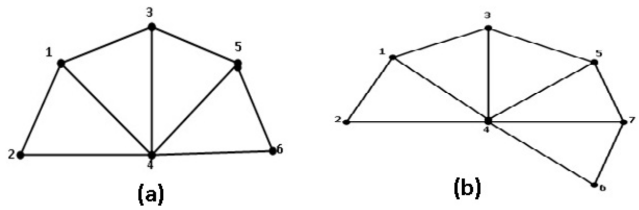
$$S_2 + f(x_n) = (n-k+1)(n+k+2) - \frac{(3n+k+3)(n-k)}{2}$$

Diperoleh nilai $k = 3$ dan $k = 4$. Dengan demikian untuk $k = 3$ nilai n yang memenuhi adalah $n = 4$ atau $n = 5$. dan untuk $k = 4$ nilai n yang memenuhi adalah $n = 5$ atau $n = 6$.

Sekarang, untuk $k = 3, n = 4$ dan $n = 5$, kita konstruksi ke dalam pelabelan titik (3,1)-sisi antiajaib menjadi f_3 dan f_4 . Untuk $k = 4, n = 5$,dan $n = 6$ kita konstruksi ke dalam pelabelan titik (3,1)-sisi antiajaib sehingga menjadi f_5 dan f_6. $f_3(c) = f_4(c) = 3, f_3(x-1) = f_4(x_1) = 1, f_3(x_2) = f_4(x_2) = 2, f_3(x_3) = f_4(x_3) = 4, f_3(x_4) = 5, f_4(x_4) = 6, f_4(x_5) = 5. f_5(c) = f_6(c) = 4, f_5(x_1) = f_6(x_1) = 2, f_5(x_2) = f_6(x_2) = 1, f_5(x_3) = f_6(x_3) = 3, f_5(x_4) = f_6(x_4) = 5, f_5(x_5) = 6, f_6(x_5) = 7, f_6(x_6) = 6$. $\square$



Gambar 2. Pelabelan titik $(3,1)$-sisi antiajaib pada $\mathbb{F}_4$ dan $\mathbb{F}_5$ dengan $k = 3$.



Gambar 3. Pelabelan titik $(3,1)$-sisi antiajaib pada $\mathbb{F}_5$ dan $\mathbb{F}_6$ dengan $k = 4$.

Teorema 2. *Graf kipas* $\mathbb{F}_n$*,* $n \geq 2$ *memuat pelabelan total* (a,d)*-sisi antiajaib super jika* $2 \leq n \leq 6$ *dan* $d \in \{0,1,2\}$.

Bukti. Dari lema sebelumnya diketahui bahwa graf kipas $\mathbb{F}_n, 2 \leq n \leq 6$ adalah pelabelan titik (3,1)-sisi antiajaib. Misalkan $g : V(\mathbb{F}_n = \rightarrow \{1,2,\cdots,n+1\}$ adalah pelabelan titik (3,1)-sisi antiajaib untuk $2 \leq n \leq 6$ dan himpunan bobot sisi dari sisi $e_i \in E(\mathbb{F}_n)$ adalah $W_g = \{w_g(e_i) = 2+i : 1 \leq i \leq 2n-1\}$. Misalkan $g_j : E(\mathbb{F}_n) \rightarrow \{n+2, n+3, \cdots, 3n\}$ menjadi pelabelan sisi dari graf kipas $\mathbb{F}_n$ untuk $j \in \{1,2,3\}$ dan $2 \leq n \leq 6$, dimana

$$g_1(e_i) = 3n+1-i \text{ jika } 1 \leq i \leq 2n-1 \tag{1}$$

$$g_2(e_i) = \begin{cases} 2n+2-\frac{i+1}{2}, \text{ jika } i \text{ ganjil } 1 \leq i \leq 2n-1; \\ 3n+1-\frac{i}{2}, \text{ jika } i \text{ genap } 2 \leq i \leq 2n-2. \end{cases} \tag{2}$$

$$g_3(e_i) = n+1+i, \text{ jika } 1 \leq i \leq 2n-1. \tag{3}$$

Dapat dilihat bahwa penggabungan pelabelan titik g dan pelabelan sisi $g_j, j \in \{1,2,3\}$ membentuk pelabelan totol $(a, j-1)$-sisi antiajaib dimana himpunan bobot sisinya adalah $W_j = \{w_g(e_i) + g_j(e_i) : 1 \leq i \leq 2n-1\}$. $\square$

3 Kesimpulan

Misal $G = (V,E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$. Suatu pelabelan $g : V \cup E \rightarrow \{1,2,\cdots,p+q\}$ dikatakan total (a,d)-sisi antiajaib jika himpunan bobot sisi $W = \{w(xy)|w(xy) = g(x)+g(y)+g(xy), \forall xy \in E(G)\}$ dapat ditulis sebagai $W = \{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(e-1)d\}$. Suatu pelabelan total dikatakan super jika $g(V) = \{1,2,\cdots,p\}$.

Graf Kipas $\mathbb{F}_n$ adalah graf yang diperoleh dari penghapusan satu sisi di siklus yang ada pada graf Roda. Banyaknya titik pada $\mathbb{F}_n$ adalah $n+1$ dan banyaknya sisi $2n-1$. Pada tulisan ini telah ditunjukkan bahwa graf kipas $\mathbb{F}_n$ mempunyai pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib super jika $2 \leq n \leq 6$ dan $d \in \{0,1,2\}$.

4 Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Lyra Yulianti, Bapak Narwen, Bapak Admi Nazra, Bapak Dodi Devianto, Bapak Ahmad Iqbal Baqi dan Bapak Zulakmal yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

5 Daftar Pustaka

1. Baca, M., Miller, M., 2008, *Super Edge Antimagic Graph*, Brown Walker Press, Boca Raton-Florida
2. Baca, M., Lin, Y., Miller, M., M. Z., Yousief, 2007. *Edge Antimagic Graph*, Discrete Mathematics **307** pp 1232 – 1244 , Boca Raton-Florida
3. Chartrand Gary. dan Ping Zhang., Introduction to Graph Theory. McGraw. Hill International Edition
4. Miller, Mirka. 2000. *Open Problem in Graph Theory:Labeling and Extremal Grpah.*Prosiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia X di Institut Teknologi Bandung, 17-20 Juli.