Jurnal Matematika UNAND
Vol. **3** No. **4** Hal. 139 – 146
ISSN : 2303–291X


# PERBANDINGAN KUASA *WILCOXON RANK SUM* TEST DAN *PERMUTATION TEST* DALAM BERBAGAI DISTRIBUSI TIDAK NORMAL

RESTI MUSTIKA SARI, YUDIANTRI ASDI, FERRA YANUAR
*Program Studi Matematika,*
*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,*
*Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,*
*restimustika92@gmail.com*

**Abstrak.** Kuasa dari suatu uji statistik adalah peluang menolak hipotesis nol kalau hipotesis nol tersebut salah. Simulasi dengan menggunakan software R dilakukan untuk membandingkan kuasa *Wilcoxon Rank Sum Test* dan *Permutation Test* untuk membandingkan dua nilai tengah populasi yang dibangkitkan dari distribusi Uniform, Eksponensial, Log Normal dan Weibull. Hasil simulasi data menunjukkan bahwa pada sebaran Uniform uji yang lebih baik adalah *Permutation Test*. Untuk sampel menengah dan sampel besar pada distribusi Eksponensial, Weibull dan Log-Normal uji yang lebih baik adalah *Wilcoxon Rank Sum Test*. Sedangkan untuk sampel berukuran kecil yang berasal dari distribusi Eksponensial, Weibull dan Log-Normal tidak bisa ditentukan mana uji yg lebih baik diantara *Wilcoxon Rank Sum Test* dan *Permutation Test*.

*Kata Kunci*: Kuasa Uji, *Wilcoxon Rank Sum Test*, *Permutation Test*

## 1. Pendahuluan

Terdapat beberapa jenis uji statistik dari metode Statistika Non-Parametrik diantaranya adalah *Wilcoxon Rank Sum Test* dan *Permutation Test*. Prosedur *Wilcoxon Rank Sum Test* ini digunakan untuk menganalisis hasil pengamatan data yang berpasangan apakah berbeda atau tidak, sekaligus menganalilis berapa besar dari perbedaan tersebut. Selain itu juga untuk mengetahui arah perbedaan antara pasangan-pasangan data tersebut.

*Permutation Test* dipopulerkan oleh R.A. Fisher pada pertengahan abad ke-20. Metode pengujian hipotesis ini populer digunakan karena tidak mengandalkan asumsi distribusi tertentu. *Permutation Test* ini bisa digunakan untuk semua distribusi statistik, baik distribusi normal maupun distribusi yang jauh dari asumsi kenormalan.

Ketepatan dari *Wilcoxon Rank Sum Test* dan *Permutation Test* untuk distribusi tertentu dapat dilihat dari besar kuasa ujinya. Kuasa uji merupakan peluang kita untuk menolak hipotesis nol kalau hipotesis nol tersebut salah. Semakin besar kuasa uji yang diperoleh maka semakin baik ketepatan suatu uji statistik.

## 2. Tinjauan Pustaka

### 2.1. *Pengujian Hipotesis Dua Nilai Tengah Populasi*

#### 2.1.1. *Pengertian Pengujian Hipotesis*

Hipotesis dapat diartikan sebagai suatu pernyataan yang masih lemah kebenarannya dan perlu dibuktikan atau dugaan yang sifatnya masih sementara. Hipotesis statistik adalah suatu anggapan atau pernyataan, yang mungkin benar atau tidak, mengenai satu populasi atau lebih. Dalam pengujian hipotesis, keputusan yang dibuat mengandung ketidakpastian, artinya keputusan bisa benar atau salah, sehingga menimbulkan resiko. Besar kecilnya resiko dinyatakan dalam bentuk peluang [6].

#### 2.1.2. *Prosedur Pengujian Hipotesis Dua Nilai Tengah Populasi*

Langkah-langkah pengujian hipotesis dua nilai tengah populasi adalah sebagai berikut:

(1) Menentukan Formulasi Hipotesis.

- Hipotesis Nol atau Hipotesis Nihil
  Hipotesis nol, disimbolkan $H_0$ adalah hipotesis yang dirumuskan sebagai suatu pernyataan yang akan diuji.
- Hipotesis Alternatif atau Hipotesis Tandingan
  Hipotesis alternatif disimbolkan $H_1$ atau $H_a$ adalah hipotesis yang dirumuskan sebagai lawan atau tandingan dari hipotesis nol.

(2) Menentukan Taraf Nyata *(Significant Level)*
Taraf nyata adalah besarnya batas toleransi dalam menerima kesalahan hasil hipotesis terhadap nilai parameter populasinya. Taraf nyata dilambangkan dengan $\alpha$ *(alpha)*. Semakin tinggi taraf nyata yang digunakan, semakin tinggi pula penolakan hipotesis nol atau hipotesis yang diuji, padahal hipotesis nol benar.

(3) Menentukan Kriteria Pengujian
Kriteria pengujian adalah bentuk pembuatan keputusan dalam menerima atau menolak hipotesis nol ($H_0$) dengan cara membandingkan nilai tabel distribusinya (nilai kritis) dengan nilai statistik ujinya, sesuai dengan bentuk pengujiannya.

(4) Menentukan Nilai Statistik Uji
Statistik uji merupakan rumus-rumus yang berhubungan dengan distribusi tertentu dalam pengujian hipotesis. Statistik uji merupakan perhitungan untuk menduga parameter data sampel yang diambil secara acak dari sebuah populasi.

(5) Membuat Kesimpulan
Pembuatan kesimpulan merupakan penetapan keputusan dalam hal penerimaan atau penolakan hipotesis nol ($H_0$), sesuai dengan kriteria pengujiannya. Pembuatan kesimpulan dilakukan setelah membandingkan nilai staistik uji dengan titik kritis.

2.1.3. *Kesalahan dalam Pengujian Hipotesis*

Dalam pengujian hipotesis dapat terjadi dua jenis kesalahan, yaitu

- Kesalahan Jenis I
  Penolakan hipotesis nol padahal hipotesis itu benar disebut galat jenis I. Artinya, kita menolak hipotesis tersebut ($H_0$) yang seharusnya diterima.
- Kesalahan Jenis II
  Penerimaan hipotesis nol padahal hipotesis itu salah disebut galat jenis II. Artinya, kita menerima hipotesis ($H_0$) yang seharusnya ditolak.

2.1.4. *Kuasa Uji*

Kuasa suatu pengujian merupakan nilai yang mengukur besarnya peluang untuk menolak hipotesis nol kalau hipotesis itu salah. Dapat juga dinyatakan bahwa kuasa dari suatu uji sama dengan $1 - \beta$, dimana $\beta$ adalah peluang kesalahan jenis II. Semakin kecil nilai peluang untuk melakukan kesalahan jenis II ( makin kecil nilai $\beta$), maka semakin kuat pengujian tersebut.

## 2.2. *Uji Jumlah Peringkat Wilcoxon*

Uji Jumlah-Peringkat Wilcoxon *(Wilcoxon Rank Sum Test)* merupakan prosedur Non Parametrik yang sederhana yang diajukan oleh Wilcoxon untuk membandingkan nilai tengah dua populasi bukan normal yang kontinu, apabila dua contoh yang bebas diambil dari kedua populasi itu.

Misalkan akan diuji hipotesis nol $H_0$ bahwa $\mu_1 = \mu_2$, yang merupakan lawan dari suatu hipotesis alternatif yang diinginkan. Pertama-tama, tarik satu contoh acak dari masing-masing populasi. Misalkan $n_1$ adalah ukuran contoh yang lebih kecil, dan $n_2$ adalah ukuran contoh yang lebih besar. Gabungkan kedua contoh itu dan urutkan pengamatannya dari yang terkecil sampai terbesar, dan berikan peringkat $1, 2, \cdots, n_1+n_2$ pada setiap pengamatan. Bila terdapat dua atau lebih pengamatan yang sama, berikan peringkat rata-ratanya.

Lambangkan jumlah peringkat pada contoh yang berukuran lebih kecil dengan $w_1$. Begitu pula, $w_2$ adalah jumlah peringkat pada contoh yang lebih besar. Total $w_1+w_2$ bergantung hanya pada banyaknya pengamatan dalam kedua contoh.secara umum,

$$w_1 + w_2 = \frac{((n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1))}{2}, \tag{2.1}$$

jumlah semua bilangan asli $1, 2, \cdots, n_1 + n_2$. Bila $w_1$ telah dihitung, maka $w_2$ akan lebih mudah diperoleh dengan rumus

$$w_2 = \frac{((n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1))}{2} - w_1. \tag{2.2}$$

Bila contoh sebesar $n_1$ dan $n_2$ diambil berulang-ulang, maka nilai $w_1$ dan $w_2$ bervariasi. Jadi, $w_1$ dan $w_2$ dapat dipandang sebagai nilai peubah acak $W_1$ dan $W_2$. Hipotesis nol $\mu_1 = \mu_2$ ditolak dan alternatifnya $\mu_1 < \mu_2$ diterima jika $w_1$ kecil dan $w_2$ besar. Begitu pula alternatif $\mu_1 > \mu_2$ diterima jika $w_1$ besar dan $w_2$ kecil.

Untuk uji dua arah akan ditolak $H_0$ dan menerima $H_1$ bila $w_1$ kecil dan $w_2$ besar atau bila $w_1$ besar dan $w_2$ kecil.

Dalam prakteknya biasanya keputusan didasarkan pada nilai

$$u_1 = w_1 - \frac{(n_1(n_1+1))}{2} \tag{2.3}$$

$$u_2 = w_2 - \frac{(n_2(n_2+1))}{2} \tag{2.4}$$

yang berasal dari statistik $U_1$ atau $U_2$, atau pada nilai statistik $U$, yang terkecil diantara $U_1$ dan $U_2$.

### 2.3. *Permutation Test*

*Permutation Test* adalah suatu teknik statistik yang menggunakan komputer secara intensif yang diperkenalkan oleh R.A Fisher pada tahun 1930. Ide dasarnya bebas dari asumsi-asumsi matematika yaitu tidak memperhatikan sebaran yang mendasarinya. Uji ini layak digunakan untuk semua sebaran, baik sebaran Normal ataupun sebaran yang jauh dari asumsi kenormalan [1].

Misalkan kita akan menguji $H_0$ bahwa $\mu_1 = \mu_2$ lawan suatu alternatif yang diinginkan ($H_1\mu_1 < \mu_2, \mu_1 > \mu_2$ atau $\mu_1 \neq \mu_2$). Pertama-tama, diambil sampel acak dari masing-masing populasi. Misalkan $m$ dan $n$ masing-masing ukuran sampel yang diambil dari populasi yang pertama dan kedua. Rata-rata sampel dari kedua sampel tersebut adalah $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ .

Uji hipotesis dimulai dengan menghitung suatu statistik uji $\hat{\theta} = \bar{b} - \bar{a}$. Dengan diduganya $\hat{\theta}$, akan dihitung ASL *(achieved significance level)* atau taraf nyata yang dicapai.Dalam *Permutation Test*, kedua contoh digabungkan sehingga terdapat $N = m + n$ pengamatan. Dari hasil penggabungan ini, diambil suatu sampel acak berukuran $m$ tanpa pengembalian untuk mewakili kelompok yang pertama (misalkan $a_1^*, a_2^*, \cdots, a_m^*$), dan $n$ pengamatan untuk mewakili kelompok yang kedua (misalkan $b_1^*, b_2^*, \cdots, b_n^*$).

Selanjutnya dihitung perbedaan rata-rata antara kedua kelompok yang telah ditentukan, yakni $\hat{\theta^*} = \bar{b^*} - \bar{a^*}$,yang didefinisikan sebagai replikasi permutasi dari $\hat{\theta}$. Kemudian mengulangi proses ini sebanyak mungkin. Misalkan proses tersebut diulang sebanyak $B$ kali. Maka terdapat $B$ buah vektor sebarang, dan masing-masing dipilih secara acak dari himpunan yang beranggotakan $\binom{N}{n}$ kemungkinan untuk masing-masing vektor.

Untuk masing-masing vektor tersebut didapatkan $\hat{\theta}^*(x)$, dimana $x = 1, 2, \cdots, B$ yang berhubungan dengan masing-masing vektor permutasi. Masing-masing nilai $\hat{\theta}^*(x)$ dibandingkan dengan nilai $\hat{\theta}$ yang telah dihitung. ASL permutasi di defenisikan sebagai peluang permutasi dimana $\hat{\theta}^*$ lebih besar atau sama dengan $\hat{\theta}$ [1].

Rumus umtuk $ASL$ permutasi:

$$\widehat{ASL}perm = \frac{frekuensi(\hat{\theta}^* \geq \hat{\theta})}{B}. \tag{2.5}$$

### 2.4. *Beberapa Distribusi Tidak Normal Kontinu*

2.4.1. *Distribusi* Uniform

Suatu peubah acak kontinu $X$ dikatakan memiliki seragam kontinu pada selang $(a, b)$ jika memiliki fkp dalam bentuk:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, a < x < b \tag{2.6}$$

Jika $X$ terdistribusi seragam kontinu pada selang $(a, b)$, maka nilai harapan dari $X$ adalah:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}. \tag{2.7}$$

2.4.2. *Distribusi Eksponensial*

Suatu peubah acak kontinu $X$ dikatakan memiliki distribusi eksponensial dengan parameter $\theta > 0$ jika memiliki fkp dalam bentuk:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \tag{2.8}$$

Jika $X$ menyebar menurut distribusi eksponensial $(\theta)$, maka nilai harapan dari $X$ adalah

$$E(X) = \theta. \tag{2.9}$$

2.4.3. *Distribusi Weibull*

Suatu peubah acak kontinu $X$ dikatakan memiliki distribusi Weibull dengan parameter $\theta$ dan $\beta$, dengan $\theta > 0$, $\beta > 0$ jika memiliki fkp dalam bentuk:

$$f(x;\theta,\beta) = \frac{\beta}{\theta^{\beta}}x^{\beta-1}e^{-(\frac{x}{\theta})^{\beta}}; x > 0. \tag{2.10}$$

Jika $X$ menyebar menurut distribusi weibull $(\theta, \beta)$, maka nilai harapan dari $X$ adalah:

$$E(X) = \theta\Gamma(1 + \frac{1}{\beta}). \tag{2.11}$$

2.4.4. *Distribusi Log Normal*

Fungsi kepekatan peluang dari distribusi log normal dengan parameter $\mu$ dan $\sigma$ diberikan oleh:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp(-\frac{[\ln(x)-\mu]^2}{2\sigma^2}); x\epsilon(0,\infty), \tag{2.12}$$

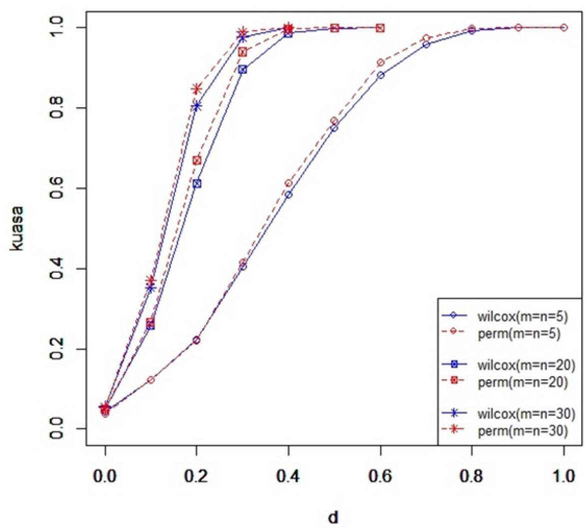
Jika $X$ menyebar menurut distribusi log normal $(\mu, \sigma)$, maka nilai harapan dari $X$ adalah:

$$E(X) = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2). \tag{2.13}$$

## 3. Hasil Pembahasan

Gambar 1 sampai 4 berikut merupakan grafik kuasa uji dari sebaran Uniform, Eksponensial, Weibull dan Log Normal. Secara umum dari hasil plot gambar 1 dapat dilihat bahwa pada distribusi Uniform, kuasa *Permutation Test* Lebih tinggi dari kuasa *Wilcoxon Rank Sum Test* untuk ketiga ukuran sampel yang diuji, sehingga *Permutation Test* lebih baik digunakan daripada *Wilcoxon Rank Sum Test*.

Pada Gambar 2, 3 dan 4 dapat dilihat bahwa untuk sampel menengah ($m = n = 20$) dan sampel besar ($m = n = 30$) pada distribusi Eksponensial, Weibull dan Log-Normal kuasa *Wilcoxon Rank Sum Test* lebih tinggi dibanding kuasa *Permutation Test*, sehingga uji yang lebih baik adalah *Wilcoxon Rank Sum Test*. sedangkan untuk sampel berukuran kecil ($m = n = 5$) nya dapat dilihat bahwa kuasa *Permutation Test* lebih tinggi dibanding kuasa *Wilcoxon Rank Sum Test* untuk nilai konstan (d) yang semakin besar, sedangkan pada awal-awal penambahan nilai konstan (d) kuasa *Wilcoxon Rank Sum Test* lebih tinggi dibanding kuasa *Permutation Test*, sehingga tidak dapat ditentukan mana uji yang lebih baik diantara *Wilcoxon Rank Sum Test* dan *Permutation Test*.

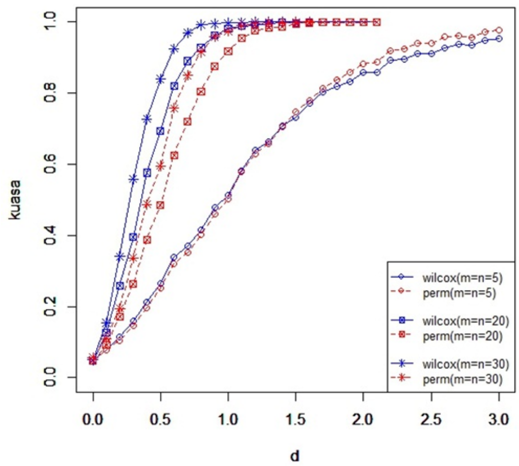



Gambar 1. Kuasa Wilcoxon Rank Sum Test dan Permutation Test Distribusi Uniform

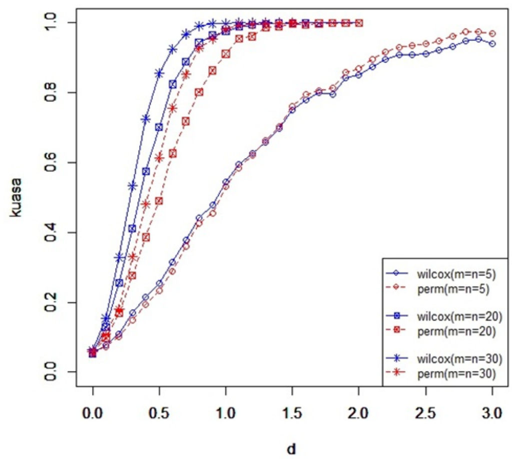
## 4. Penutup

(1) Pada distribusi Uniform kuasa *Permutation Test* lebih tinggi dibanding kuasa *Wilcoxon Rank Sum Test* untuk ketiga ukuran sampel yang diuji, sehingga uji yang lebih baik untuk sebaran Uniform adalah *Permutation Test*.

(2) Untuk sampel menengah ($m = n = 20$) dan sampel besar ($m = n = 30$) pada distribusi Eksponensial, Weibull dan Log-Normal kuasa *Wilcoxon Rank Sum*



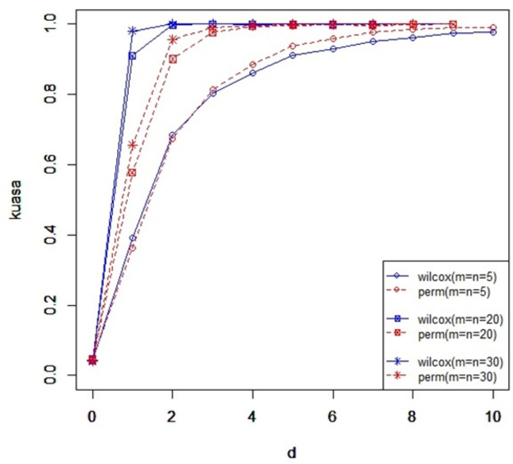

Gambar 2. Kuasa Wilcoxon Rank Sum Test dan Permutation Test Distribusi Eksponensial




Gambar 3. Kuasa Wilcoxon Rank Sum Test dan Permutation Test Distribusi Weibull

*Test* lebih tinggi dibanding kuasa *Permutation Test*, sehingga uji yang lebih baik adalah *Wilcoxon Rank Sum Test*.

(3) Untuk sampel berukuran kecil ($m = n = 5$) yang berasal dari distribusi Eksponensial, Weibull dan Log-Normal, kuasa *Permutation Test* lebih tinggi dibanding kuasa *Wilcoxon Rank Sum Test* untuk nilai konstan (d) yang semakin besar, sedangkan pada awal-awal penambahan nilai konstan (d) kuasa *Wilcoxon Rank Sum Test* lebih tinggi dibanding kuasa *Permutation Test*, sehingga tidak dapat ditentukan mana uji yang lebih baik diantara *Wilcoxon Rank Sum Test* dan *Permutation Test*.




Gambar 4. Kuasa Wilcoxon Rank Sum Test dan Permutation Test Distribusi Log Normal

## 5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Yudiantri Asdi, M.Sc, Ibu Dr. Ferra Yanuar, Bapak Dr. Dodi Devianto, Ibu Hazmira Yozza,M.Si dan Ibu Dr. Lyra Yulianti yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

## Daftar Pustaka

[1] Bain, L.J and Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics* Second Edition. Duxbury Press: California.
[2] Efron, Bradley dan Robert J. Tibshirani. 1993. *An Introduction to the Bootstrap*. New York Chapman dan Hall.
[3] Siegel, Sidney. 1985. *Statistika Nonparametrik*. Jakarta PT. Gramedia.
[4] Supranto, J. 2001. *Statistika Teori dan Aplikasi*. Jakarta Erlangga.
[5] Walpole, Ronald E. 1995. *Pengantar Statistika*. Jakarta PT. Gramedia Pustaka Indonesia.
[6] Walpole, Ronald E dan Raymond H. Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan*. Bandung, ITB.