Jurnal Matematika UNAND
Vol. **3** No. **4** Hal. 152 – 159
ISSN : 2303–291X

PENDUGAAN PARAMETER DARI DISTRIBUSI POISSON DENGAN MENGGUNAKAN METODE *MAXIMUM LIKEHOOD ESTIMATION* (MLE) DAN METODE BAYES

MEUTIA FIKHRI, FERRA YANUAR, YUDIANTRI ASDI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
fikhrimeutia@ymail.com

Abstrak. Pendugaan titik dari sebuah parameter populasi adalah sebuah nilai yang diperoleh dari contoh dan digunakan sebagai penduga dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Pendugaan titik dapat ditentukan dengan beberapa metode pendugaan, yaitu metode Momen, metode *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE) dan metode Bayes. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan pendugaan titik pada distribusi Poisson untuk satu parameter dengan metode *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE) dan metode Bayes dan membandingkan kedua metode dalam menduga parameter distribusi Poisson. Distribusi Prior untuk metode Bayes yang digunakan pada penelitian ini adalah distribusi prior Gamma. Perbandingan kedua metode dilakukan melalui simulasi data pada berbagai kondisi parameter dan ukuran sampel, kemudian dilihat ketakbiasan, kekonsistenan, dan keefisienan. Hasil simulasi data menunjukkan bahwa metode Bayes lebih konsisten dibandingkan dengan metode *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE) dalam menduga parameter distribusi Poisson.

Kata Kunci: Distribusi Poisson, Distribusi Gamma, Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), Metode Bayes, Metode Evaluasi Pendugaan

1. Pendahuluan

Statistika adalah suatu ilmu yang berisi sejumlah aturan dan prosedur untuk mengumpulkan data, menyajikan data, menganalisa data, serta menginterpretasikannya. Metode statistika terbagi dua, yaitu statistika deskriptif dan statistika inferensi. Statistika inferensi dapat dikelompokkan ke dalam dua bidang utama, yaitu pendugaan parameter dan pengujian hipotesis. Pendugaan parameter merupakan suatu cara untuk memprediksi karakteristik dari suatu populasi berdasarkan contoh yang diambil. Terdapat dua jenis pendugaan parameter dalam statistika, yaitu pendugaan titik dan pendugaan selang. Pendugaan titik dari sebuah parameter populasi adalah sebuah nilai yang diperoleh dari contoh dan digunakan sebagai penduga dari parameter yang nilainya tidak diketahui.

Beberapa metode pendugaan titik yang digunakan untuk menduga parameter diantaranya metode momen, metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan metode Bayes. Metode momen menduga parameter dengan cara menyamakan momen contoh ke-k dengan momen populasi ke-k dan menyelesaikan sistem persamaan yang dihasilkan. Selanjutnya metode MLE merupakan suatu metode pendugaan parameter yang memaksimumkan fungsi kemungkinan. Kemudian metode Bayes merupakan metode pendugaan yang menggabungkan distribusi prior dan distribusi contoh. Distribusi prior adalah distribusi awal yang memberi informasi tentang parameter. Distribusi contoh yang digabung dengan distribusi prior akan menghasilkan suatu distribusi baru yaitu distribusi posterior yang selanjutnya menjadi dasar untuk pendugaan parameter di dalam metode Bayes.

Pada saat sekarang ini, telah banyak penelitian yang dilakukan mengenai pendugaan parameter dengan menggunakan berbagai metode dari berbagai distribusi. Dalam penelitian ini dilakukan pengkajian mengenai pendugaan parameter dari distribusi Poisson dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan metode Bayes. Hasil pendugaan parameter dari distribusi Poisson dengan metode MLE dan metode Bayes ini akan dibandingkan dengan menggunakan simulasi, kemudian dilihat ketakbiasan, keefisienan dan kekonsistenan pada kedua metode.

2. Pendugaan Parameter Distribusi Poisson Menggunakan Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah contoh acak Poisson (μ), maka fungsi kemungkinan-nya adalah

$$\begin{aligned} L(\mu) &= f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!} \\ &= \frac{e^{-n\mu}\mu^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \end{aligned}$$

Logaritma natural dari fungsi kemungkinannya adalah

$$\begin{aligned} \ln L(\mu) &= \ln \frac{e^{-n\mu}\mu^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \\ &= \ln e^{-n\mu} + \ln \mu^{\sum x_i} - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i! \\ &= -n\mu \ln e + \sum x_i \ln \mu - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i! \end{aligned}$$

Dengan mendiferensialkan terhadap μ, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L(\mu)}{d\mu} &= 0 \\ -n + \frac{\sum x_i}{\mu} &= 0 \\ \frac{\sum x_i}{\mu} &= n \\ \mu &= \frac{\sum x_i}{n}. \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dilakukan uji turunan kedua untuk menunjukkan bahwa $\widehat{\mu}$ benar-benar memaksimumkan fungsi kemungkinan $L(\mu)$

$$\frac{d^2 \ln L(\mu)}{d^2 \mu} = -\frac{\sum x_i}{\mu^2} < 0.$$

Karena $\widehat{\mu}$ memaksimumkan fungsi kemungkinan $L(\mu)$, maka penduga untuk parameter μ menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) adalah

$$\widehat{\mu}_{MLE} = \frac{\sum x_i}{n}. \tag{2.1}$$

3. Pendugaan Parameter Distribusi Poisson Menggunakan Metode Bayes

Misalkan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ adalah peubah acak dari distribusi Poisson (μ). Fungsi kemungkinan dari distribusi Poisson (μ) adalah

$$\begin{aligned} L(\mu) &= f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu), \\ L(\mu) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\mu} \mu^{x_i}}{x_i!} \\ &= \frac{e^{-n\mu} \mu^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}. \end{aligned}$$

Prior sekawan untuk distribusi Poisson dengan parameter μ akan memiliki bentuk yang sama sebagai fungsi kemungkinan, yaitu memiliki bentuk

$$L(\mu) \propto e^{-n\mu} \mu^{\Sigma x_i}.$$

Distribusi yang memiliki bentuk seperti ini adalah distribusi Gamma (α, β), yang memiliki bentuk fungsi kepekatan peluang :

$$f(\mu; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \mu^{\alpha - 1} e^{-\frac{\mu}{\beta}},$$

dengan $\alpha - 1 = \Sigma x_i$, $\frac{1}{\beta} = n$ dan $\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$ adalah faktor yang dibutuhkan untuk membuat fungsi kepekatan peluang tersebut.

Dalam teorema Bayes setelah data diambil dan prior telah ditentukan, maka kemudian dicari distribusi posteriornya, yaitu

$$f(\mu|x) = \frac{f(\mu)f(x|\mu)}{\int_0^\infty f(\mu)f(x|\mu)d\mu}. \tag{3.1}$$

Jika $X \sim Poisson(\mu)$ dan distribusi prior $\mu \sim GAM(\alpha, \beta)$, maka distribusi posterior dapat dinyatakan sebagai fungsi bersyarat dari μ dengan x diketahui, sehingga berdasarkan Definisi 2.2.20 dapat ditulis dengan

$$f(\mu|x) = \frac{f(\mu, x)}{f(x)}. \tag{3.2}$$

Karena $f(\mu, x)$ dapat dinyatakan dengan $f(x)f(\mu|x)$ atau $f(\mu)f(x|\mu)$, maka

$$f(\mu)f(x|\mu) = \frac{\mu^{\alpha-1}e^{-\frac{\mu}{\beta}}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-n\mu}\mu^{\Sigma x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

$$\frac{\mu^{\alpha-1+\Sigma x_i}e^{-\mu(n+\frac{1}{\beta})}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)\prod_{i=1}^n x_i!} \tag{3.3}$$

Selanjutnya perhatikan $f(x)$, dimana $f(x)$ merupakan fungsi marginal dari x, sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty f(\mu, x)d\mu \\ &= \int_0^\infty f(\mu)f(x|\mu)d\mu \\ &= \int_0^\infty \frac{\mu^{\alpha-1+\Sigma x_i}e^{-\mu(n+\frac{1}{\beta})}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)\prod_{i=1}^n x_i!}d\mu \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)\prod_{i=1}^n x_i!}\int_0^\infty \mu^{\alpha-1+\Sigma x_i}e^{-\mu(n+\frac{1}{\beta})}d\mu \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)\prod_{i=1}^n x_i!}\Gamma(\alpha+\Sigma x_i)((n+\frac{1}{\beta})^{-1})^{\alpha+\Sigma x_i} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dengan persamaan (3.2), (3.3), dan (3.4), distribusi posterior dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} f(\mu|x) &= \frac{f(\mu)f(x|\mu)}{\int_0^\infty f(\mu)f(x|\mu)d\mu} \\ &= \frac{\frac{\mu^{\alpha-1+\Sigma x_i}e^{-\mu(n+\frac{1}{\beta})}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)\prod_{i=1}^n x_i!}}{\frac{\Gamma(\alpha+\Sigma x_i)((n+\frac{1}{\beta})^{-1})^{\alpha+\Sigma x_i}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)\prod_{i=1}^n x_i!}} \end{aligned}$$

$$f(\mu|x) = \frac{e^{-\mu(n+\frac{1}{\beta})}\mu^{\alpha-1+\Sigma x_i}}{\Gamma(\alpha+\Sigma x_i)((n+\frac{1}{\beta})^{-1})^{\alpha+\Sigma x_i}} \tag{3.5}$$

Berdasarkan persamaan (3.5) dapat diketahui bahwa distribusi posterior diatas merupakan distribusi Gamma dengan parameternya $\alpha + \Sigma x_i$ dan $(n + \frac{1}{\beta})^{-1}$ atau $\mu \sim \text{GAM}(\alpha + \Sigma x_i,\ (n + \frac{1}{\beta})^{-1})$.

Nilai rata-rata posterior dijadikan sebagai penduga parameter μ dalam metode Bayes [8]. Berdasarkan Teorema dinyatakan bahwa jika $X \sim GAM(\alpha, \beta)$ maka $\mu = E(X) = \alpha\beta$. Dengan demikian penduga Bayes untuk parameter μ, yang dinyatakan dengan $\widehat{\mu}_B$ adalah

$$\widehat{\mu}_B = \frac{\alpha + \Sigma x_i}{n + \frac{1}{\beta}} \tag{3.6}$$

4. Evaluasi Sifat Penduga

4.1. *Sifat Tak Bias dari Nilai Dugaan μ dengan Menggunakan metode Maximum Likelihood Estimation (MLE)*

Jika $X_1, X_2, \cdots, X_n$ adalah contoh acak Poisson (μ) dan diketahui penduga MLE nya adalah $\widehat{\mu}_{MLE} = \frac{\Sigma x_i}{n}$, maka nilai harapan $\widehat{\mu}$ adalah

$$\begin{aligned} E(\widehat{\mu}_{MLE}) &= E(\frac{\Sigma X_i}{n}) \\ &= \frac{1}{n}E(\Sigma X_i) \\ &= \frac{1}{n}\Sigma E(X_i) \\ &= \frac{1}{n}\Sigma\mu \\ &= \frac{1}{n}n\mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

Karena $E(\widehat{\mu}_{MLE}) = \mu$, maka $\widehat{\mu}_{MLE}$ merupakan penduga tak bias bagi μ.

4.2. *Sifat Tak Bias dari Nilai Dugaan μ dengan Menggunakan Metode Bayes*

Misalkan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ adalah contoh acak Poisson (μ). Diketahui $\widehat{\mu}_B = \frac{\alpha + \Sigma x_i}{n + \frac{1}{\beta}}$ merupakan pendugaan Bayes untuk parameter μ, maka nilai harapan dari pendugaan Bayes $\widehat{\mu}_B$ adalah

$$\begin{aligned} E(\widehat{\mu}_B) &= E(\frac{\alpha + \Sigma X_i}{n + \frac{1}{\beta}}) \\ &= \frac{1}{n + \frac{1}{\beta}}E(\alpha + \Sigma X_i) \\ &= \frac{1}{n + \frac{1}{\beta}}E(\alpha) + E(\Sigma X_i) \\ &= \frac{1}{n + \frac{1}{\beta}}E(\alpha) + \Sigma E(X_i) \\ &= \frac{1}{n + \frac{1}{\beta}}(\alpha + n\mu) \end{aligned}$$

Karena $E(\widehat{\mu}_B) \neq \mu$, maka $\widehat{\mu}_B$ merupakan penduga bias bagi μ. Tetapi secara asimtotik tidak bias karena $\lim_{n\to\infty} E(\widehat{\mu}) = \mu$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{\beta}}(\alpha + n\mu) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha + n\mu}{n+\frac{1}{\beta}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{n} + \frac{n\mu}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1/\beta}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{n} + \mu}{1 + \frac{1}{n\beta}}\\ &= \frac{\mu}{1}\\ &= \mu\end{aligned}$$

5. Membandingkan sifat penduga parameter μ antara metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan metode Bayes

Penduga yang diperoleh dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan metode Bayes akan dibandingkan menggunakan simulasi. Simulasi data dilakukan dengan program R, yaitu membangkitkan data berdistribusi Poisson dengan $\mu = 1.5, \mu = 1.5, \mu = 1$, serta lima macam ukuran sampel yaitu n=25,50,100,500,1000. Kemudian dilakukan perulangan sebanyak 500 kali. Selanjutnya dihitung nilai rata-rata dan nilai *Mean Square Error* (MSE) dari kedua metode.

Nilai rata-rata dan nilai *Mean Square Error* (MSE) ditampilkan pada tabel 1 dan tabel 2

Tabel 1. Rata-rata nilai dugaan dengan Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan Metode Bayes

n	Nilai Rata-rata	
	MLE	Bayes
	$\mu = 1.5$	$\mu = 1.5$, $\alpha = 1.5, \beta = 1$
25	1.51024	1.51469
50	1.49208	1.49098
100	1.49944	1.49954
500	1.49998	1.50037
1000	1.50005	1.49998

Tabel 1 dan 2 menunjukkan nilai rata-rata dan nilai MSE yang berbeda dari

Tabel 2. Nilai *Mean Square Error* (MSE) dengan Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan Metode Bayes

n	Nilai MSE	
	MLE	Bayes
	$\mu = 1.5$	$\mu = 1.5$, $\alpha = 1.5, \beta = 1$
25	0.05664	0.05229
50	0.03018	0.02900
100	0.01511	0.01398
500	0.00317	0.00305
1000	0.00147	0.00139

masing-masing metode. Terlihat bahwa semakin besar ukuran contoh, nilai rata-rata pada kedua metode semakin mendekati nilai μ, dan nilai MSE yang dihasilkan semakin kecil dan mendekati 0. Metode Bayes menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil dibandingkan dengan metode MLE.

6. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian yang telah dilakukan antara lain:

1. a. Penduga parameter μ dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) untuk distribusi Poisson (μ) jika dinyatakan sebagai $\widehat{\mu}$ dapat dirumuskan sebagai

$$\widehat{\mu} = \frac{\sum x_i}{n}$$

b. Penduga parameter μ dengan metode Bayes untuk distribusi Poisson (μ) jika dinyatakan sebagai $\widehat{\mu}_B$ dapat dirumuskan sebagai

$$\widehat{\mu}_B = \frac{\alpha + \Sigma x_i}{n + \frac{1}{\beta}}$$

2. Secara teoritis, pendugaan parameter dengan metode MLE adalah penduga tak bias dan metode Bayes adalah penduga bias bagi parameter μ dari distribusi Poisson. Namun penduga Bayes adalah penduga tak bias asimtotik bagi parameter μ. Karena kedua penduga adalah penduga tak bias dan penduga bias, sehingga tidak bisa dibandingkan keefisienan dari penduga kedua metode, karena keefisienan penduga berlaku untuk penduga yang tak bias. Pada tabel 1 dan 2, terlihat bahwa semakin besar ukuran contoh, nilai rata-rata pada kedua metode semakin mendekati nilai μ, dan nilai MSE yang dihasilkan semakin kecil dan mendekati 0. Metode Bayes menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil dibandingkan dengan metode MLE. Sehingga pendugaan parameter μ dari distribusi Poisson dengan metode Bayes lebih konsisten dibandingkan dengan metode MLE.

7. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Dodi Devianto, Ibu Dr. Maiyastri, dan Ibu Dr. Lyra Yulianti yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Al-Kutubi HS, Ibrahim NA. 2009. Bayes Estimator for Exponential Distribution with Extension of Jeffrey Prior Information. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. **3**(2): 297-313.

[2] Bain, L.J and Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics Second Edition*. Duxbury Press, California.

[3] Bolstad, W.M. 2007. *Introduction to Bayesian Statistics Second Edition*. A John Wiley dan Sons Inc Publication, America.

[4] Casella, G and R.L. Berger. 2001. *Statistical Inference Second Edition*. Pacific Grove, California.

[5] Nurlaila Dwi, Dadan Kusnandar, dan Evy Sulistianingsih. 2013. Perbandingan Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan Metode Bayes dalam Pendugaan Parameter Distribusi Eksponensial. *Buletin Ilmiah Mat.Stat dan terapannya*.

[6] Pradhan B, Kundu D. 2008. Bayes Estimation and Prediction of the Two-Parameter Gamma Distribution. *Applied Mathematical Sciences*. **2**(51):2521-2530.

[7] Walpole, R.E. 1993. *Pengantar Statistika Edisi ke-3*. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

[8] Walpole, R.E dan Myers, R.H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. ITB, Bandung.