Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **1** Hal. 1 – 11
ISSN : 2303-291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

PERBANDINGAN MODEL MALTHUS DAN MODEL VERHULST UNTUK ESTIMASI JUMLAH PENDUDUK INDONESIA TAHUN 2000 – 2014

WIDYA PUTRI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
widyaputri848@gmail.com

Abstrak. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan model dan menghitung estimasi jumlah penduduk Indonesia tahun 2000 – 2014 berdasarkan jenis kelamin dan kelompok umur yang lebih mendekati dengan estimasi jumlah penduduk Indonesia yang dilakukan oleh BPS karena metode estimasi yang dilakukan oleh BPS Indonesia tersebut tidak diketahui. Penelitian ini menggunakan data sekunder dari Badan Pusat Statistika (BPS) Sumatera Barat. Model yang digunakan untuk estimasi jumlah penduduk Indonesia tahun 2000 – 2014 adalah model Malthus (model eksponensial) dan model Verhulst (model logistik). Dari kedua model dibandingkan dengan galat, yaitu galat terkecil sebagai model estimasi jumlah penduduk Indonesia yang lebih mendekati dengan hasil estimasi BPS. Hasil estimasi jumlah penduduk Indonesia dengan model Verhulst yang lebih mendekati dengan hasil estimasi BPS, sehingga dapat disusun ke dalam bentuk tabel dan dapat digambarkan ke dalam bentuk piramida penduduk untuk melihat komposisi penduduk dan distribusi penduduk berdasarkan kelompok umur.

Kata Kunci: Estimasi jumlah penduduk, model Malthus, model Verhulst

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial dapat membentuk suatu model matematika yang diperoleh dari perumusan abstraksi sebagai permasalahan fenomena yang ada di alam dan di lingkungan kehidupan manusia sehari-hari. Model matematika dapat mencari penyelesaian dan memecahkan permasalahan dari berbagai bidang keilmuan dan salah satu nya adalah pada bidang demografi. Dalam kajian demografi, diantaranya terdapat dua model pertumbuhan penduduk yang digunakan dalam mengukur jumlah penduduk, yaitu model Malthus (model eksponensial) dan model Verhulst (model logistik).

Di Indonesia data jumlah penduduk yang paling mendekati kondisi sebenarnya hanyalah data hasil sensus penduduk yang dilaksanakan oleh Badan Pusat Statistik (BPS) Indonesia setiap dalam sepuluh tahun pada tahun yang berakhiran angka nol. Setiap tahunnya antara tahun sensus penduduk, BPS melakukan estimasi jumlah penduduk Indonesia dari tahun ke tahun berdasarkan jenis kelamin dan kelompok umur. Namun, metode atau model pertumbuhan penduduk untuk estimasi jumlah penduduk yang dilakukan BPS Indonesia tidak diketahui. Penulis tertarik meneliti model pertumbuhan penduduk yaitu model Malthus (model eksponensial)

dan model Verhulst (model logistik) untuk estimasi jumlah penduduk Indonesia. Dari kedua model pertumbuhan penduduk itu ditentukan salah satu model pertumbuhan penduduk yang paling mendekati dengan data hasil estimasi jumlah penduduk Indonesia pertahun berdasarkan jenis kelamin dan kelompok umur pada tahun 2000 – 2014 yang dilakukan oleh BPS.

2. Persamaan Diferensial dan Model Pertumbuhan Penduduk

2.1. *Persamaan Diferensial*

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu (atau beberapa fungsi) yang tidak diketahui.

Definisi 2.1. [3] *Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk*

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

dimana $y, y', \ldots, y^{(n)}$ *semua ditentukan nilainya oleh* x.

Mencari penyelesaian persamaan diferensial dapat dilakukan dengan teknik persamaan diferensial dengan peubah terpisah dan persamaan diferensial dengan peubah yang dapat dipisahkan. Persamaan diferensial orde satu dapat dinyatakan dengan persamaan

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{2.1}$$

Berdasarkan persamaan diferensial orde satu dengan peubah terpisah diperoleh penyelesaian umum

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c. \tag{2.2}$$

Dari bentuk umum 2.1, dimisalkan $M(x, y) = f_1(x)g_2(y)$ dan $N(x, y) = f_2(x)g_1(y)$,berdasarkan persamaan diferensial orde satu dengan peubah yang dapat dipisahkan diperoleh penyelesaian umum

$$\int \frac{f_1 x}{f_2 x} dx + \int \frac{g_1 y}{g_2 y} dy = C. \tag{2.3}$$

2.2. *Model Pertumbuhan Penduduk*

Tabel 1 dan 2 merupakan hasil sensus penduduk tahun 2000 dan 2010 dan hasil estimasi penduduk 2001 sampai 2009 serta 2011 sampai 2014 menurut kelompok umur interval 5 tahun dan jenis kelamin yang dilakukan oleh BPS Indonesia.

3. Estimasi Jumlah Penduduk Indonesia dengan Model Malthus

Model pertumbuhan penduduk Malthus dikenal dengan model eksponensial, dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P, \lambda > 0, \tag{3.1}$$

Tabel 1. Estimasi Jumlah Penduduk Laki-Laki Indonesia Tahun 2000-2014

Tahun / Umur	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
0-4	10.153.400	10.264.300	10.294.000	10.318.700	10.344.000	10.364.400	10.419.900	10.453.800
5-9	11.117.100	10.926.700	10.730.400	10.526.000	10.306.200	10.082.300	10.134.200	10.180.100
10-14	10.780.600	10.836.300	10.902.800	10.961.400	11.020.700	11.077.800	10.866.800	10.663.800
15-19	10609400	10.628.800	10.655.400	10.679.100	10.704.400	10.727.300	10.780.300	10.840.200
20-24	9722800	9.882.500	10.046.200	10.208.100	10.367.300	10.524.300	10.546.200	10.572.100
25-29	9103900	9.219.300	9.348.000	9.466.900	9.565.200	9.631.500	9.802.000	9.987.900
30-34	8427800	8.597.700	8.729.300	8.828.300	8.920.500	9.012.500	9.151.400	9.257.300
35-39	7512700	7.685.300	7.857.900	8.025.900	8.182.100	8.324.800	8.455.000	8.580.900
40-44	6473500	6.675.600	6.865.300	7.043.200	7.216.300	7.387.100	7.556.200	7.728.200
45-49	5153500	5.387.200	5.629.000	5.866.800	6.096.000	6.311.400	6.507.900	6.695.900
50-54	3869200	4.063.000	4.271.800	4.492.700	4.721.000	4.952.000	5.185.700	5.418.800
55-59	2987100	3.082.200	3.196.100	3.326.000	3.473.300	3.635.700	3.820.000	4.021.100
60-64	2474400	2.468.400	2.499.400	2.558.200	2.633.300	2.712.300	2.801.200	2.910.300
65-69	1805700	1.855.600	1.909.600	1.969.600	2.037.600	2.130.600	2.160.600	2.190.600
70-74	1264800	1.235.100	1.237.100	1.272.100	1.337.100	1.430.000	1.489.100	1.558.100
75+	1366500	1.388.000	1.412.000	1.439.000	1.467.000	1.497.700	1.532.000	1.568.000
Total	102.822.400	104.196.000	105.584.300	106.982.000	108.392.000	109.801.700	111.208.500	112.627.100

Tahun / Umur	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
0-4	10.490.100	10.523.100	10.567.200	10.590.500	10.613.400	10.640.100	10.663.700
5-9	10.229.400	10.270.400	10.311.400	10.357.800	10.402.700	10.446.400	10.488.000
10-14	10.458.000	10.255.200	10.056.200	10.100.400	10.149.300	10.195.000	10.243.500
15-19	10.904.500	10.964.500	11.036.100	10.828.700	10.627.800	10.425.500	10.224.000
20-24	10.598.400	10.627.200	10.656.800	10.718.900	10.781.500	10.850.200	10.912.900
25-29	10.175.200	10.336.200	10.443.800	10.482.600	10.527.500	10.562.200	10.577.800
30-34	9.341.500	9.432.600	9.554.900	9.757.000	9.938.900	10.111.600	10.260.300
35-39	8.702.100	8.814.100	8.925.000	9.026.600	9.124.400	9.224.000	9.339.700
40-44	7.897.400	8.059.400	8.211.600	8.346.900	8.475.700	8.597.200	8.708.900
45-49	6.874.000	7.051.000	7.230.900	7.401.700	7.571.400	7.744.800	7.908.500
50-54	5.651.900	5.879.900	6.098.000	6.297.600	6.482.300	6.658.600	6.836.300
55-59	4.236.200	4.461.100	4.685.100	4.911.900	5.142.400	5.370.800	5.590.600
60-64	3.032.400	3.172.300	3.328.600	3.504.200	3.695.500	3.898.700	4.109.700
65-69	2.229.700	2.284.600	2.360.700	2.442.600	2.537.800	2.645.900	2.780.900
70-74	1.623.200	1.676.100	1.710.400	1.767.100	1.812.200	1.848.300	1.885.300
75+	1.607.100	1.651.000	1.699.100	1.753.000	1.816.100	1.881.200	1.956.200
Total	114.051.100	115.458.700	116.875.800	118.287.500	119.698.900	121.100.500	122.486.300

dimana λ menyatakan laju pertumbuhan penduduk. Berikut ini adalah solusi jumlah penduduk P pada saat t atau P_t berdasarkan (3.1), diperoleh

$$\frac{dP}{P} = \lambda dt$$

$$\frac{1}{P}dP = \lambda dt$$

$$\int_{P_0}^{P_t} \frac{1}{P}dP = \int_0^t \lambda dt$$

$$P_t = P_0 e^{\lambda t} \tag{3.2}$$

Tabel 2. Estimasi Jumlah Penduduk Perempuan Indonesia Tahun 2000-2014

Umur \ Tahun	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
0-4	9.798.600	9.844.000	9.886.700	9.921.700	9.954.000	9.985.100	10.021.400	10.055.100
5-9	10.749.300	10.563.300	10.368.800	10.166.000	9.960.300	9.747.800	9.792.800	9.830.500
10-14	10.370.000	10.449.000	10.524.500	10.593.600	10.660.900	10.724.000	10.525.400	10.325.100
15-19	10.567.900	10.529.500	10.485.300	10.438.400	10.389.500	10.337.400	10.408.200	10.478.700
20-24	10.295.100	10.346.400	10.393.900	10.435.900	10.480.400	10.517.200	10.473.800	10.427.600
25-29	9.563.900	9.719.100	9.882.700	10.035.700	10.157.200	10.230.900	10.285.600	10.348.300
30-34	8.479.400	8.751.500	8.969.100	9.156.200	9.325.600	9.489.500	9.693.000	9.847.700
35-39	7.430.000	7.643.100	7.873.600	8.020.800	8.204.100	8.395.200	8.598.600	8.809.200
40-44	6.123.800	6.388.300	6.644.000	6.888.000	7.114.400	7.330.600	7.536.900	7.729.400
45-49	4.675.800	4.923.000	5.188.800	5.466.800	5.741.100	6.007.100	6.264.700	6.515.100
50-54	3.615.500	3.770.900	3.939.700	4.119.600	4.319.900	4.543.200	4.785.600	5.046.900
55-59	2.933.800	3.008.200	3.098.000	3.208.000	3.330.200	3.463.800	3.616.000	3.778.200
60-64	2.585.600	2.581.400	2.599.200	2.638.200	2.689.300	2.747.100	2.817.200	2.908.300
65-69	2.007.100	2.067.700	2.129.600	2.186.500	2.247.600	2.324.000	2.344.500	2.362.600
70-74	1.389.300	1.400.100	1.432.100	1.491.100	1.576.100	1.680.200	1.747.100	1.823.100
75+	1.724.500	1.746.000	1.772.000	1.802.000	1.839.000	1.879.900	1.932.000	1.992.000
Total	102.309.600	103.731.500	105.252.000	106.568.500	107.989.600	109.403.000	110.842.800	112.277.800

Umur \ Tahun	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
0-4	10.092.000	10.129.200	10.160.500	10.180.800	10.202.300	10.222.900	10.243.900
5-9	9.871.200	9.911.500	9.949.200	9.989.100	10.028.600	10.067.200	10.102.200
10-14	10.125.900	9.927.100	9.732.900	9.771.800	9.813.200	9.857.800	9.896.800
15-19	10.552.500	10.626.600	10.702.200	10.505.200	10.308.700	10.114.300	9.914.400
20-24	10.384.400	10.342.600	10.301.400	10.375.300	10.449.600	10.525.200	10.602.300
25-29	10.405.100	10.446.300	10.469.700	10.429.200	10.385.500	10.339.100	10.298.100
30-34	9.970.600	10.075.600	10.172.600	10.263.400	10.334.800	10.388.500	10.422.500
35-39	9.024.200	9.228.200	9.417.500	9.588.900	9.744.400	9.886.100	10.008.000
40-44	7.915.500	8.105.500	8.305.600	8.510.200	8.721.700	8.939.200	9.145.200
45-49	6.756.100	6.991.200	7.214.200	7.420.000	7.613.400	7.800.700	7.992.700
50-54	5.320.000	5.592.000	5.861.700	6.118.800	6.369.200	6.609.500	6.838.600
55-59	3.958.100	4.157.200	4.376.300	4.613.100	4.871.400	5.141.600	5.410.700
60-64	3.014.400	3.133.300	3.266.400	3.413.300	3.571.500	3.746.700	3.939.800
65-69	2.390.700	2.433.600	2.493.500	2.564.600	2.650.800	2.749.900	2.863.900
70-74	1.890.200	1.943.100	1.971.000	2.014.100	2.044.200	2.070.300	2.103.300
75+	2.057.100	2.131.000	2.206.900	2.286.000	2.366.100	2.454.300	2.546.200
Total	113.728.000	115.174.000	116.601.600	118.043.800	119.475.400	120.913.300	122.328.600

Sumber: BPS [2]

$$\lambda = \frac{1}{t} ln \frac{P_t}{P_0} \tag{3.3}$$

Dalam Tabel 3 disajikan hasil estimasi jumlah penduduk Indonesia tahun 2000 – 2014 berdasarkan jenis kelamin dan kelompok umur dengan menggunakan Model Malthus.

Dengan mengabaikan faktor selisih imigrasi dan emigrasi, maka seharusnya jumlah penduduk semakin berkurang karena ada sejumlah penduduk yang mati. Hal ini terjadi karena setiap kelompok umur itu memiliki peluang hidup yang sama. Namun, secara keseluruhan untuk jumlah estimasi penduduk baik laki-laki maupun perempuan (dengan mengabaikan kelompok umur) masih bisa diterima. Kesalahan yang sama juga terjadi pada estimasi jumlah penduduk dengan menggunakan model Verhulst bila dibagi dalam kelompok-kelompok umur.

Tabel 3. Estimasi Jumlah Penduduk Indonesia Berdasarkan Jenis Kelamin dan Kelompok Umur dengan Model Malthus

Kelompok Umur	2000		2001		2002	
	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan
0–4	10.153.400	9.798.600	10.112.922	9.834.202	10.072.605	9.869.934
5–9	11.117.100	10.749.300	11.033.775	10.666.477	10.951.075	10.584.291
10–14	10.780.600	10.370.000	10.705.872	10.304.457	10.631.661	10.239.328
15–19	10.609.400	10.567.900	10.651.317	10.581.254	10.693.399	10.594.624
20–24	9.722.800	10.295.100	9.812.392	10.295.730	9.902.810	10.296.360
25–29	9.103.900	9.563.900	9.229.764	9.650.836	9.357.368	9.738.563
30–34	8.427.800	8.479.400	8.534.251	8.635.188	8.642.047	8.793.839
35–39	7.512.700	7.430.000	7.643.236	7.608.228	7.776.040	7.790.730
40–44	6.473.500	6.123.800	6.629.305	6.313.294	6.788.860	6.508.651
45–49	5.153.500	4.675.800	5.331.032	4.883.027	5.514.680	5.099.439
50–54	3.869.200	3.615.500	4.049.280	3.794.494	4.237.741	3.982.350
55–59	2.987.100	2.933.800	3.124.616	3.053.502	3.268.463	3.178.087
60–64	2.474.400	2.585.600	2.548.878	2.646.745	2.625.598	2.709.336
65–69	1.805.700	2.007.100	1.854.749	2.051.129	1.905.130	2.096.125
70–74	1.264.800	1.389.300	1.303.555	1.438.749	1.343.498	1.489.958
75+	1.366.500	1.724.500	2.929.154	1.767.564	2.626.864	1.811.703
Total	102.822.400	102.309.600	105.494.098	103.524.876	106.337.839	104.783.319

Kelompok Umur	2003		2004		2005	
	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan
0–4	10.032.449	9.905.795	9.992.453	9.941.787	9.952.617	9.977.909
5–9	10.868.994	10.502.739	10.787.529	10.421.815	10.706.674	10.341.515
10–14	10.557.965	10.174.611	10.484.780	10.110.303	10.412.102	10.046.401
15–19	10.735.648	10.608.012	10.778.064	10.621.417	10.820.647	10.634.838
20–24	9.994.061	10.296.990	10.086.153	10.297.620	10.179.093	10.298.250
25–29	9.486.736	9.827.087	9.617.892	9.916.415	9.750.862	10.006.556
30–34	8.751.204	8.955.404	8.861.740	9.119.937	8.973.672	9.287.494
35–39	7.911.151	7.977.611	8.048.611	8.168.974	8.188.458	8.364.928
40–44	6.952.256	6.710.054	7.119.584	6.917.689	7.290.939	7.131.748
45–49	5.704.654	5.325.441	5.901.173	5.561.460	6.104.461	5.807.939
50–54	4.434.974	4.179.506	4.641.386	4.386.422	4.857.405	4.603.583
55–59	3.418.932	3.307.756	3.576.328	3.442.716	3.740.971	3.583.181
60–64	2.704.627	2.773.408	2.786.035	2.838.994	2.869.893	2.906.132
65–69	1.956.880	2.142.107	2.010.035	2.189.098	2.064.635	2.237.120
70–74	1.384.665	1.542.990	1.427.093	1.597.910	1.470.821	1.654.784
75+	2.355.770	1.856.945	2.112.653	1.903.316	1.894.626	1.950.846
Total	107.250.965	106.086.456	108.231.508	107.435.873	109.277.876	108.833.225

Kelompok Umur	2006		2007		2008	
	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan
0-4	9.912.939	10.014.163	9.873.420	10.050.549	9.834.058	10.087.066
5-9	10.626.425	10.261.834	10.546.778	10.182.766	10.467.728	10.104.308
10-14	10.339.928	9.982.903	10.268.254	9.919.807	10.197.077	9.857.109
15-19	10.863.398	10.648.276	10.906.319	10.661.732	10.949.409	10.675.204
20-24	10.272.890	10.298.880	10.367.551	10.299.510	10.463.084	10.300.140
25-29	9.885.670	10.097.516	10.022.342	10.189.303	10.160.904	10.281.924
30-34	9.087.018	9.458.129	9.201.795	9.631.899	9.318.023	9.808.861
35-39	8.330.736	8.565.583	8.475.485	8.771.050	8.622.750	8.981.446
40-44	7.466.419	7.352.432	7.646.122	7.579.944	7.830.150	7.814.497
45-49	6.314.752	6.065.342	6.532.288	6.334.152	6.757.318	6.614.876
50-54	5.083.478	4.831.495	5.320.072	5.070.690	5.567.679	5.321.726
55-59	3.913.193	3.729.378	4.093.343	3.881.540	4.281.787	4.039.911
60-64	2.956.276	2.974.857	3.045.258	3.045.208	3.136.919	3.117.222
65-69	2.120.717	2.286.195	2.178.323	2.336.347	2.237.493	2.387.599
70-74	1.515.889	1.713.683	1.562.338	1.774.678	1.610.210	1.837.843
75+	1.853.799	1.999.562	1.813.852	2.049.495	1.774.765	2.100.674
Total	110.543.526	110.280.227	111.853.540	111.778.668	113.209.352	113.330.407

4. Estimasi Jumlah Penduduk Indonesia dengan Model Verhulst

Pada tahun 1840 seorang matematikawan dan juga seorang ahli biologi berkebangsaan Belgia yaitu Pierre Verhulst yang mengubah model Malthus. Verhulst

Tabel 4. Estimasi Jumlah Penduduk Indonesia Berdasarkan Jenis Kelamin dan Kelompok Umur dengan Model Malthus (lanjutan)

Kelompok Umur	2009		2010		2011	
	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan
0-4	9.794.853	10.123.717	9.755.804	10.160.500	9.716.911	10.197.417
5-9	10.389.270	10.026.454	10.311.400	9.949.200	10.234.114	9.872.541
10-14	10.126.394	9.794.808	10.056.200	9.732.900	9.986.493	9.671.384
15-19	10.992.669	10.688.694	11.036.100	10.702.200	11.079.703	10.715.724
20-24	10.559.498	10.300.770	10.656.800	10.301.400	10.754.999	10.302.030
25-29	10.301.381	10.375.387	10.443.800	10.469.700	10.588.188	10.564.870
30-34	9.435.718	9.989.075	9.554.900	10.172.600	9.675.587	10.359.497
35-39	8.772.573	9.196.889	8.925.000	9.417.500	9.080.075	9.643.403
40-44	8.018.607	8.056.307	8.211.600	8.305.600	8.409.238	8.562.607
45-49	6.990.099	6.908.042	7.230.900	7.214.200	7.479.996	7.533.927
50-54	5.826.809	5.585.191	6.098.000	5.861.700	6.381.813	6.151.898
55-59	4.478.906	4.204.743	4.685.100	4.376.300	4.900.786	4.554.857
60-64	3.231.338	3.190.939	3.328.600	3.266.400	3.428.789	3.343.645
65-69	2.298.271	2.439.975	2.360.700	2.493.500	2.424.825	2.548.199
70-74	1.659.549	1.903.258	1.710.400	1.971.000	1.762.809	2.041.154
75+	1.736.520	2.153.132	1.699.100	2.206.900	1.662.486	2.262.010
Total	114.612.456	114.937.380	116.064.404	116.601.600	117.566.812	118.325.162

Kelompok Umur	2012		2013		2014	
	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan
0-4	9.678.173	10.234.468	9.639.589	10.271.654	9.601.160	10.308.975
5-9	10.157.407	9.796.473	10.081.275	9.720.991	10.005.714	9.646.091
10-14	9.917.269	9.610.256	9.848.525	9.549.515	9.780.258	9.489.158
15-19	11.123.478	10.729.264	11.167.426	10.742.822	11.211.547	10.756.397
20-24	10.854.102	10.302.660	10.954.119	10.303.291	11.055.057	10.303.921
25-29	10.734.573	10.660.905	10.882.981	10.757.813	11.033.441	10.855.602
30-34	9.797.799	10.549.827	9.921.555	10.743.654	10.046.873	10.941.043
35-39	9.237.845	9.874.725	9.398.356	10.111.595	9.561.656	10.354.148
40-44	8.611.633	8.827.567	8.818.899	9.100.726	9.031.154	9.382.337
45-49	7.737.673	7.867.824	8.004.227	8.216.519	8.279.963	8.580.668
50-54	6.678.834	6.456.462	6.989.680	6.776.105	7.314.993	7.111.573
55-59	5.126.402	4.740.699	5.362.405	4.934.124	5.609.272	5.135.441
60-64	3.531.994	3.422.717	3.638.305	3.503.659	3.747.816	3.586.514
65-69	2.490.691	2.604.099	2.558.346	2.661.224	2.627.840	2.719.603
70-74	1.816.824	2.113.804	1.872.494	2.189.041	1.929.870	2.266.955
75+	1.626.661	2.318.497	1.591.608	2.376.394	1.557.311	2.435.737
Total	119.121.358	120.110.248	120.729.790	121.959.127	122.393.923	123.874.162

mengusulkan sebuah model baru yang dikenal dengan model diferensial logistik, yaitu :

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P\left(1 - \frac{P}{M}\right) \tag{4.1}$$

$$\int_{P_0}^{P_t} \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{M}\right)} = \int_0^t \lambda dt \tag{4.2}$$

$$\frac{P_t(M - P_0)}{P_0(M - P_t)} dP = \lambda t \tag{4.3}$$

$$P_t = \frac{M}{e^{-\lambda t}\left(\frac{M}{P_0} - 1\right) + 1} \tag{4.4}$$

$$\lambda = -\frac{1}{t}\left(ln \frac{\left(\frac{M}{P_t} - 1\right)}{\left(\frac{M}{P_0} - 1\right)}\right) \tag{4.5}$$

Dalam Tabel 5 disajikan hasil estimasi jumlah penduduk Indonesia tahun 2000 – 2014 berdasarkan jenis kelamin dan kelompok umur dengan menggunakan Model Verhulst.

Tabel 5. Estimasi Jumlah Penduduk Indonesia Berdasarkan Jenis Kelamin dan Kelompok Umur dengan Model Verhulst

Kelompok Umur	2000		2001		2002	
	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan
0-4	10.153.400	9.798.600	10.194.042	9.834.203	10.234.846	9.869.936
5-9	11.117.100	10.749.300	11.033.781	10.666.482	10.951.085	10.584.301
10-14	10.780.600	10.370.000	10.705.876	10.304.461	10.631.670	10.239.335
15-19	10.609.400	10.567.900	10.651.318	10.581.254	10.693.402	10.594.625
20-24	9.722.800	10.295.100	9.812.399	10.295.730	9.902.823	10.296.360
25-29	9.103.900	9.563.900	9.229.778	9.650.843	9.357.394	9.738.575
30-34	8.427.800	8.479.400	8.534.261	8.635.211	8.642.065	8.793.880
35-39	7.512.700	7.430.000	7.643.252	7.608.258	7.776.069	7.790.786
40-44	6.473.500	6.123.800	6.629.328	6.313.329	6.788.903	6.508.716
45-49	5.153.500	4.675.800	5.331.063	4.883.071	5.514.738	5.099.522
50-54	3.869.200	3.615.500	4.049.314	3.794.528	4.237.805	3.982.414
55-59	2.987.100	2.933.800	3.124.636	3.053.516	3.268.500	3.178.115
60-64	2.474.400	2.585.600	2.548.884	2.646.749	2.625.608	2.709.343
65-69	1.805.700	2.007.100	1.854.751	2.051.131	1.905.134	2.096.128
70-74	1.264.800	1.389.300	1.303.557	1.438.752	1.343.501	1.489.963
75+	1.366.500	1.724.500	1.396.596	1.767.566	1.427.355	1.811.707
Total	102.822.400	102.309.600	104.042.837	103.525.084	105.300.897	104.783.704

Kelompok Umur	2003		2004		2005	
	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan
0-4	10.275.813	9.905.798	10.316.943	9.941.790	10.358.238	9.977.913
5-9	10.869.007	10.502.752	10.787.544	10.421.830	10.706.690	10.341.531
10-14	10.557.976	10.174.619	10.484.792	10.110.312	10.412.115	10.046.411
15-19	10.735.652	10.608.012	10.778.068	10.621.417	10.820.651	10.634.838
20-24	9.994.078	10.296.990	10.086.173	10.297.620	10.179.114	10.298.250
25-29	9.486.771	9.827.103	9.617.933	9.916.434	9.750.906	10.006.576
30-34	8.751.229	8.955.459	8.861.769	9.120.003	8.973.703	9.287.563
35-39	7.911.190	7.977.686	8.048.656	8.169.063	8.188.506	8.365.024
40-44	6.952.313	6.710.143	7.119.652	6.917.794	7.291.012	7.131.863
45-49	5.704.734	5.325.557	5.901.268	5.561.600	6.104.565	5.808.094
50-54	4.435.062	4.179.595	4.641.493	4.386.531	4.857.524	4.603.704
55-59	3.418.984	3.307.794	3.576.391	3.442.761	3.741.040	3.583.231
60-64	2.704.641	2.773.417	2.786.051	2.839.005	2.869.911	2.906.143
65-69	1.956.886	2.142.111	2.010.042	2.189.103	2.064.642	2.237.125
70-74	1.384.668	1.542.997	1.427.097	1.597.917	1.470.826	1.654.792
75+	1.458.791	1.856.949	1.490.919	1.903.322	1.523.755	1.950.851
Total	106.597.795	106.086.983	107.934.792	107.436.503	109.313.196	108.833.909

Tabel 6. Estimasi Jumlah Penduduk Indonesia Berdasarkan Jenis Kelamin dan Kelompok Umur dengan Model Verhulst (lanjutan)

Kelompok Umur	2006		2007		2008	
	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan
0-4	10.399.698	10.014.166	10.441.323	10.050.551	10.483.115	10.087.068
5-9	10.626.440	10.261.848	10.546.791	10.182.779	10.467.737	10.104.317
10-14	10.339.940	9.982.913	10.268.265	9.919.815	10.197.085	9.857.115
15-19	10.863.403	10.648.277	10.906.322	10.661.732	10.949.412	10.675.204
20-24	10.272.910	10.298.880	10.367.569	10.299.510	10.463.098	10.300.140
25-29	9.885.713	10.097.535	10.022.380	10.189.320	10.160.933	10.281.937
30-34	9.087.048	9.458.197	9.201.822	9.631.960	9.318.043	9.808.909
35-39	8.330.783	8.565.677	8.475.528	8.771.135	8.622.783	8.981.513
40-44	7.466.491	7.352.547	7.646.187	7.580.049	7.830.201	7.814.580
45-49	6.314.857	6.065.499	6.532.384	6.334.298	6.757.394	6.614.994
50-54	5.083.599	4.831.618	5.320.185	5.070.805	5.567.770	5.321.820
55-59	3.913.263	3.729.429	4.093.408	3.881.587	4.281.840	4.039.948
60-64	2.956.293	2.974.869	3.045.274	3.045.218	3.136.931	3.117.230
65-69	2.120.724	2.286.200	2.178.330	2.336.352	2.237.499	2.387.603
70-74	1.515.894	1.713.691	1.562.342	1.774.685	1.610.213	1.837.849
75+	1.557.313	1.999.568	1.591.611	2.049.500	1.626.663	2.100.678
Total	110.734.369	110.280.913	112.199.721	111.779.295	113.710.718	113.330.907

Kelompok Umur	2009		2010		2011	
	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan
0-4	10.525.074	10.123.718	10.567.200	10.160.500	10.609.495	10.197.416
5-9	10.389.275	10.026.459	10.311.400	9.949.200	10.234.107	9.872.535
10-14	10.126.398	9.794.811	10.056.200	9.732.900	9.986.488	9.671.380
15-19	10.992.671	10.688.694	11.036.100	10.702.200	11.079.701	10.715.723
20-24	10.559.506	10.300.770	10.656.800	10.301.400	10.754.989	10.302.030
25-29	10.301.398	10.375.395	10.443.800	10.469.700	10.588.167	10.564.861
30-34	9.435.730	9.989.103	9.554.900	10.172.600	9.675.572	10.359.461
35-39	8.772.592	9.196.928	8.925.000	9.417.500	9.080.051	9.643.352
40-44	8.018.637	8.056.356	8.211.600	8.305.600	8.409.199	8.562.542
45-49	6.990.144	6.908.112	7.230.900	7.214.200	7.479.936	7.533.831
50-54	5.826.864	5.585.248	6.098.000	5.861.700	6.381.737	6.151.820
55-59	4.478.938	4.204.765	4.685.100	4.376.300	4.900.743	4.554.827
60-64	3.231.346	3.190.944	3.328.600	3.266.400	3.428.779	3.343.639
65-69	2.298.274	2.439.977	2.360.700	2.493.500	2.424.820	2.548.196
70-74	1.659.551	1.903.261	1.710.400	1.971.000	1.762.806	2.041.149
75+	1.662.487	2.153.135	1.699.100	2.206.900	1.736.519	2.262.007
Total	115.268.884	114.937.674	116.875.800	116.601.600	118.533.109	118.324.769

5. Perbandingan Model Malthus dan Model Verhulst untuk Estimasi Jumlah Penduduk

Dari hasil estimasi jumlah penduduk Indonesia berdasarkan kelompok umur tahun 2000 – 2014 dengan model Malthus dan model Verhulst, maka akan dipilih model

Tabel 7. Estimasi Jumlah Penduduk Indonesia Berdasarkan Jenis Kelamin dan Kelompok Umur dengan Model Verhulst (lanjutan)

Kelompok Umur	2012		2013		2014	
	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan
0-4	10.651.958	10.234.465	10.694.591	10.271.649	10.737.394	10.308.968
5-9	10.157.393	9.796.459	10.081.253	9.720.969	10.005.682	9.646.059
10-14	9.917.258	9.610.247	9.848.507	9.549.501	9.780.231	9.489.137
15-19	11.123.473	10.729.264	11.167.418	10.742.821	11.211.537	10.756.396
20-24	10.854.080	10.302.660	10.954.083	10.303.291	11.055.004	10.303.921
25-29	10.734.525	10.660.884	10.882.902	10.757.779	11.033.326	10.855.553
30-34	9.797.766	10.549.748	9.921.500	10.743.523	10.046.793	10.940.849
35-39	9.237.790	9.874.610	9.398.265	10.111.403	9.561.522	10.353.863
40-44	8.611.545	8.827.420	8.818.752	9.100.477	9.030.936	9.381.965
45-49	7.737.536	7.867.601	8.003.994	8.216.135	8.279.612	8.580.083
50-54	6.678.659	6.456.280	6.989.378	6.775.789	7.314.531	7.111.088
55-59	5.126.301	4.740.629	5.362.230	4.934.004	5.609.006	5.135.259
60-64	3.531.972	3.422.703	3.638.267	3.503.636	3.747.760	3.586.481
65-69	2.490.682	2.604.092	2.558.331	2.661.213	2.627.817	2.719.586
70-74	1.816.818	2.113.793	1.872.484	2.189.022	1.929.854	2.266.927
75+	1.774.762	2.318.490	1.813.846	2.376.383	1.853.791	2.435.720
Total	120.242.518	120.109.348	122.005.800	121.957.595	123.824.797	123.871.856

terbaik dengan menentukan $\bar{\varepsilon}$ (rata-rata galat mutlak) yang terkecil, yaitu::

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{t=0}^{N-1} \left| p(\hat{t}) - p(t) \right|}{N}. \tag{5.1}$$

Diperoleh $\bar{\varepsilon}$ untuk masing-masing model jumlah penduduk Indonesia, sebagai berikut.

Pada Tabel 8 terlihat rata-rata galat untuk penduduk laki-laki dengan menggunakan model Malthus yaitu 526.184,1 lebih besar daripada menggunakan model Verhulst yaitu 415.414,4 dan penduduk perempuan dengan menggunakan model Malthus yaitu 492.291,2 lebih besar daripada menggunakan model Verhulst yaitu 491.646,5. Dengan demikian, baik untuk hasil estimasi jumlah penduduk laki-laki maupun perempuan dengan menggunakan model Verhulst memiliki nilai rata-rata galat ($\bar{\varepsilon}$) lebih kecil daripada menggunakan model Malthus. Oleh karena itu, data hasil estimasi jumlah penduduk Indonesia tahun 2000-2014 yang menggunakan model Verhulst (model logistik) lebih mendekati dengan data hasil estimasi jumlah penduduk Indonesia tahun 2000 – 2014 yang dilakukan oleh BPS.

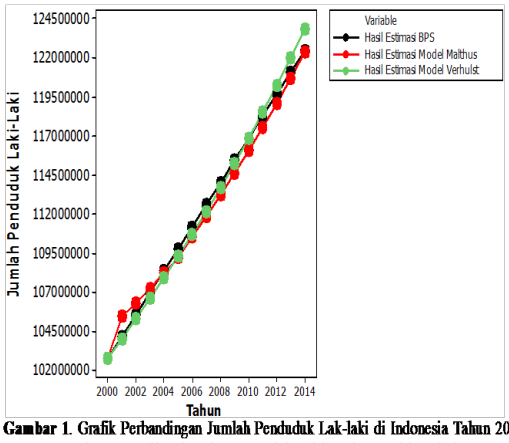
Dalam Gambar 1 dan Gambar 2 diberikan grafik perbandingan hasil estimasi jumlah penduduk Indonesia tahun 2000 – 2014.

6. Kesimpulan

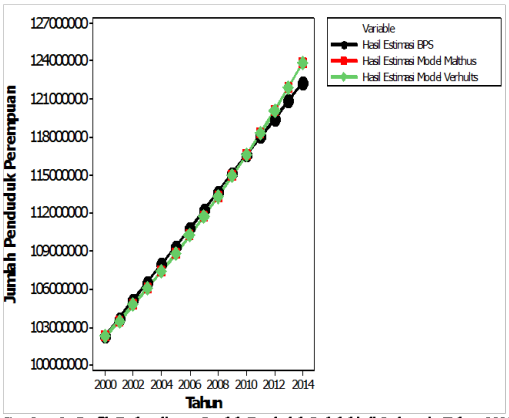
Berdasarkan hasil pembahasan estimasi jumlah penduduk menggunakan model Malthus (model eksponensial) dan model Verhulst (model logistik) dengan menghi-

Tabel 8. Hasil $\bar{\varepsilon}$ Model-model Pertumbuhan Penduduk

Tahun	Hasil Estimasi BPS		ε			
			Model Malthus		Model Verhults	
	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan	Laki-laki	Perempuan
2000	102.822.400	102.309.600	0	0	0	0
2001	104.196.000	103.731.500	1.298.098	206.624	153.163	206.416
2002	105.584.300	105.152.000	753.539	368.681	283.403	368.296
2003	106.982.000	106.568.500	268.965	482.044	384.205	481.517
2004	108.392.000	107.989.600	160.492	553.727	457.208	553.097
2005	109.801.700	109.403.000	523.824	569.775	488.504	569.091
2006	111.208.500	110.842.800	664.974	562.573	474.131	561.887
2007	112.627.100	112.277.800	773.560	499.132	427.379	498.505
2008	114.051.100	113.728.000	841.748	397.593	340.382	397.093
2009	115.458.700	115.174.000	846.244	236.620	189.816	236.326
2010	116.875.800	116.601.600	0	0	0	0
2011	118.287.500	118.043.800	720.688	281.362	245.609	280.969
2012	119.698.900	119.475.400	577.542	634.848	543.618	633.948
2013	121.100.500	120.913.300	370.710	1.045.827	905.300	1.044.295
2014	122.486.300	122.328.600	92.377	1.545.562	1.338.497	1.543.257
$\bar{\varepsilon}$			526.184,1	492.291,2	415.414,4	491.646,5



Gambar 1. Grafik Perbandingan Jumlah Penduduk Lak-laki di Indonesia Tahun 2000-2014 dengan Hasil Estimasi BPS, Model Malthus, dan Model Verhults



Gambar 2. Grafik Perbandingan Jumlah Penduduk Lak-laki di Indonesia Tahun 2000-2014 dengan Hasil Estimasi BPS, Model Malthus, dan Model Verhults

tung rata-rata galat ($\bar{\varepsilon}$) dari masing-masing model, dapat disimpulkan bahwa model untuk menentukan hasil estimasi jumlah penduduk Indonesia tahun 2000-2014 berdasarkan jenis kelamin dan kelompok umur yang lebih mendekati dengan hasil sensus dan hasil estimasi yang dilakukan oleh Badan Pusat Statistik (BPS) adalah model Verhulst (model logistik).

Daftar Pustaka

[1] Adioetomo, S. Moertiningsih dan O.B. Samosir. 2010. *Dasar-dasar Demografi.* Lembaga Demografi Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Salemba Empat, Jakarta

[2] Badan Pusat Statistika (BPS), BAPPENAS, dan UNFPA. 2005. *Proyeksi Penduduk Indonesia (Indonesia Population Projection).* Jakarta

[3] Finizio, N. dan G. Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Alih bahasa Widiarti, Edisi ke-2. Jakarta: Erlangga.