Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **1** Hal. 12 – 22
ISSN : 2303–291X

SIFAT-SIFAT FUNGSI EKSPONENSIAL BERBASIS BILANGAN NATURAL YANG DIDEFINISIKAN SEBAGAI LIMIT

ENIVA RAMADANI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
DeNiva04@gmail.com

Abstrak. Penelitian ini membahas tentang bagaimana sifat-sifat dari fungsi eksponensial yang berbasis bilangan natural, yang dinotasikan dengan $f(x) = e^x = \exp(x)$, serta dapat didefinisikan sebagai suatu limit dari dua fungsi yang berbeda, yaitu

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ atau } \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Kata Kunci: Fungsi Kontinu Seragam, Barisan, dan Limit Barisan

1. Pendahuluan

Bilangan e adalah suatu bilangan riil positif yang bersifat $\ln e = 1$. Bilangan e merupakan bilangan natural, dan terkadang disebut sebagai bilangan Euler sebagai penghargaan atas ahli matematika Swiss, Leonhard Euler. Seperti bilangan π, bilangan e adalah bilangan tak rasional. Pada Tahun 1748, Euler memberikan ide bahwa bilangan e adalah

$$e = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} + \cdots.$$

Dari [3], misalkan a adalah suatu bilangan riil positif, $a \neq 1$. Suatu fungsi f dikatakan fungsi eksponensial berbasis a jika memiliki kondisi berikut.

$$f(x) = a^x,$$

dan biasanya dikenal dengan fungsi eksponen umum. Dalam kajian ini penulis membahas fungsi eksponensial untuk $a = e$ yang dinotasikan dengan

$$e^x = \exp(x).$$

Fungsi eksponensial berbasis e dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x). \tag{1.1}$$

Dilain hal, fungsi eksponensial juga dapat didefinisikan dengan

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}. \tag{1.2}$$

Fungsi eksponensial yang berbasis e sangatlah unik, karena dapat didefinisikan sebagai suatu limit dari dua buah fungsi yang berbeda, yaitu pada persamaan (1.1) dan persamaan (1.2). Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji sifat-sifat dari fungsi eksponensial yang berbasis e yang dapat didefinisikan sebagai limit dari dua buah fungsi yang berbeda.

2. Landasan teori

2.1. *Himpunan dan Fungsi*

Suatu himpunan di dalam $\mathbb{R}$ dikatakan terbatas dia atas jika himpunan tersebut mempunyai batas atas, dan dikatakan terbatas dibawah jika himpunan tersebut mempunyai batas bawah. Jika Suatu himpunan dalam $\mathbb{R}$ mempunyai batas atas dan batas bawah maka dikatakan himpunan tersebut **terbatas**.

Misalkan A dan B adalah dua himpunan tak kosong, f dikatakan **fungsi** dari A ke B jika setiap unsur di A dipetakan secara tunggal ke suatu unsur di B, ditulis sebagai $f : A \to B$.

Definisi 2.1. [1] *Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f : A \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan kontinu seragam pada A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika x dan u adalah sebarang titik di A yang memenuhi $|x - u| < \delta(\varepsilon)$, maka $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.*

2.2. *Barisan dan Limit Barisan*

Barisan yang mempunyai suatu limit dinamakan barisan **konvergen** dan barisan yang tidak mempunyai limit dinamakan barisan **divergen**.

Definisi 2.2. [1] *Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan riil. Bilangan $x \in \mathbb{R}$ dikatakan limit dari (x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, suku ke n berada dalam lingkungan ε dari x, yaitu $x_n \in V_\varepsilon(x)$.*

Definisi 2.3. [1] *Suatu barisan riil $X = (x_n)$ dikatakan terbatas jika terdapat suatu bilangan $M \in \mathbb{R}$ dengan $M > 0$, sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.*

Definisi 2.4. [1] *Barisan $X = (x_n)$ dikatakan naik (*increasing*), jika memenuhi ketaksamaan*

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots ,$$

*dan dikatakan turun (*decreasing*) jika memenuhi*

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots .$$

Barisan X dikatakan **monoton** jika barisan tersebut naik atau turun. Bila suatu barisan memenuhi

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots \text{ atau } x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots ,$$

maka berturut-turut dinamakan barisan **naik sejati** atau **turun sejati**.

Teorema 2.5. [1] *Misalkan* $X = (x_n)$ *adalah barisan monoton. Barisan* $X = x_n$ *konvergen jika dan hanya jika* (x_n) *terbatas. Selanjutnya:*

(1) Jika barisan $X = (x_n)$ *naik terbatas, maka* $\lim(x_n) = \sup\{x_n\}$.
(2) Jika barisan $Y = (y_n)$ *turun terbatas, maka* $\lim(y_n) = \inf\{y_n\}$.

2.3. *Fungsi Floor*

Definisi 2.6. [2] *Misalkan* x *adalah suatu bilangan riil sebarang. Dapat didefinisikan*

$$\lfloor x \rfloor = \textit{bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan } x,$$
$$\lceil x \rceil = \textit{bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan } x.$$

Bilangan $\lfloor x \rfloor$ *dinamakan floor dari* x *dan* $\lceil x \rceil$ *dinamakan ceiling dari* x.

2.4. *Induksi Matematika*

Aksioma 2.7. [4] Misalkan $P(n)$ adalah suatu proposisi perihal bilangan asli, jika

(1) $P(1)$ benar, dan
(2) untuk setiap $k \geq 2$, berlaku $(P(n = k-1) \to P(n = k))$,

maka $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}^+$.

Proposisi 2.8. [5] *Untuk sebarang bilangan non-negatif* $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$ *berlaku*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}, \tag{2.1}$$

dan bernilai sama jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$.

3. Pembahasan

Misalkan $x \in \mathbb{R}$, dan misalkan bilangan $m_0 = m_0(x)$ dan $n_0 = n_0(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$m_0 = m_0(x) = \min\{k \in \mathbb{N} | k > x\} \text{ dan } n_0 = n_0(x) = \min\{k \in \mathbb{N} | k > -x\}. \tag{3.1}$$

Jadi, $m_0 = 1$ dan $n_0 = \lfloor -x \rfloor + 1$ jika $x \leq 0$, dan $m_0 = \lfloor x \rfloor + 1$ dan $n_0 = 1$ jika $x \geq 0$. Jelas bahwa, $1 + \frac{x}{n} > 0$ untuk sebarang $n \geq n_0$, dan $1 - \frac{x}{n} > 0$ untuk sebarang $n \geq m_0$.

Lema 3.1. [5] *Misalkan* $x \in \mathbb{R}$ *dan definisikan barisan* $f_n(x)$ *dan* $g_n(x)$ *sebagai berikut:*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & n < n_0, \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, & n \geq n_0 \end{cases} \quad \textit{dan}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & n < m_0 \\ \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}, & n \geq m_0 \end{cases}$$

Maka

(a) Barisan $(f_n(x))$ adalah naik untuk $n \geq n_0$, yaitu $f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \forall n \geq n_0$. Khususnya, $(f_n(x))$ adalah naik untuk $x \geq 0$ karena $n_0 = 1$.

(b) Barisan $(g_n(x))$ adalah turun untuk $n \geq m_0$, yaitu $g_n(x) \geq g_{n+1}(x), \forall n \geq m_0$. Khususnya, $(g_n(x))$ adalah turun untuk $x \leq 0$ karena $m_0 = 1$.

(c) $0 \leq g_n(x) \leq -f_n(x) \leq \frac{x^2}{n} g_{k_0}$ untuk sebarang $n \geq k_0 = \max\{m_0, n_0\}$.

(d) Terdapat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\{f_n(x) | n \in \mathbb{N}\}, \text{ dan}$$
$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = L.$$

Lebih jauh, $f_{n_0}(x) \leq L \leq g_{m_0}(x)$.

(e) Jika $|h| < 1$ maka

$$1 + h \leq (1 + \frac{h}{n})^n \leq (1 - \frac{h}{n})^{-n} \leq (1 - h)^{-1} \text{ untuk semua } n \geq 1.$$

Bukti.

(a) Misalkan $n \geq n_0$ dan $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1} = 1 + \frac{x}{n} > 0$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{x}{n+1} &= \frac{(n+1) + x}{n+1}, \\
&= \frac{1 + n(1 + \frac{x}{n})}{n+1}, \\
&= \frac{1 + (1 + \frac{x}{n}) + (1 + \frac{x}{n}) + \cdots + (1 + \frac{x}{n})}{n+1}, \\
&\geq \sqrt[n+1]{1\big(1 + \frac{x}{n}\big)\big(1 + \frac{x}{n}\big) \ \cdots \ \big(1 + \frac{x}{n}\big)} \quad \text{(dari Pertaksamaan (2.1))} \\
&= \sqrt[n+1]{\big(1 + \frac{x}{n}\big)^n}
\end{aligned}$$

Jadi, barisan $(f_n(x))$ adalah naik karena

$$f_{n+1}(x) = \big(1 + \frac{x}{n+1}\big)^{n+1} \geq \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n = f_n(x).$$

Pertaksamaan ini juga terpenuhi untuk $x = 0$.

(b) Misalkan $n \geq m_0$ dan $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1} = 1 - \frac{x}{n} > 0$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{x}{n+1} &= \frac{(n+1) - x}{n+1}, \\
&= \frac{1 + n(1 - \frac{x}{n})}{n+1} \\
&= \frac{1 + (1 - \frac{x}{n}) + (1 - \frac{x}{n}) + \ \cdots \ + (1 - \frac{x}{n})}{n+1} \\
&\geq \sqrt[n+1]{1\big(1 - \frac{x}{n}\big)\big(1 - \frac{x}{n}\big) \ \cdots \ \big(1 - \frac{x}{n}\big)} \quad \text{(dari Pertaksamaan (2.1))} \\
&= \sqrt[n+1]{\big(1 - \frac{x}{n}\big)^n}.
\end{aligned}$$

Akibatnya

$$\big(1-\frac{x}{n+1}\big)^{n+1} \geq \big(1-\frac{x}{n}\big)^{n} > 0.$$

Jadi, barisan $(g_n(x))$ adalah turun karena

$$g_{n+1}(x) = \big(1-\frac{x}{n+1}\big)^{-(n+1)} \leq \big(1-\frac{x}{n}\big)^{-n} = g_n(x)$$

Pertaksamaan ini juga terpenuhi untuk $x = 0$.

(c) Misalkan $n \geq k_0 = \max\{m_0, n_0\}$.
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
g_n(x) - f_n(x) &= g_n(x) - \frac{g_n(x)}{g_n(x)} f_n(x) \\
&= g_n(x)\Big(1 - \frac{f_n(x)}{g_n(x)}\Big) \\
&= g_n(x)\Big(1 - \frac{(1+\frac{x}{n})^n}{(1-\frac{x}{n})^{-n}}\Big) \\
&= g_n(x)\Big(1 - \big\{\frac{(n+x)^n}{n^n}\frac{n^{-n}}{(n-x)^{-n}}\big\}\Big) \\
&= g_n(x)\Big(1 - \frac{(n^2-x^2)^n}{(n^2)^n}\Big) \\
&= g_n(x)\Big(1 - \big(\frac{n^2}{n^2} - \frac{x^2}{n^2}\big)^n\Big) \\
&= g_n(x)\Big(1 - \big(1 - \frac{x^2}{n^2}\big)^n\Big) \\
&= g_n(x)(1-q^n)
\end{aligned}$$

dimana $q = 1 - \frac{x^2}{n^2}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $n \geq k_0 > |x|$. Misalkan $n \geq k_0 = \max\{m_0, n_0\}$.

(1) Kasus 1. Untuk $x \leq 0$.
Diperoleh $n \geq k_0 = \max\{1, \lfloor -x \rfloor + 1\} = \lfloor -x \rfloor + 1 > -x$. Jadi $x > -k_0$.

(2) Kasus 2. Untuk $x \geq 0$.
Diperoleh $n \geq k_0 = \max\{\lfloor x \rfloor + 1, 1\} = \lfloor x \rfloor + 1 > x$. Jadi $x < k_0$.

Dari Kasus 1 dan Kasus 2 dapat disimpulkan bahwa $n \geq k_0 > |x|$. Karena $0 \leq \frac{x^2}{n^2} < 1$ maka $q = 1 - \frac{x^2}{n^2} \leq 1$. Akibatnya $0 < q \leq 1$, sehingga

$$\begin{aligned}
q \leq 1 &\Leftrightarrow q^n \leq 1 \\
&\Leftrightarrow 1 - q^n \geq 0.
\end{aligned}$$

Jelas bahwa, $g_n(x) - f_n(x) \geq 0$ untuk $n \geq k_0$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 0 \leq g_n(x) - f_n(x) &= g_n(x)(1-q^n) \\ &= g_n(x)(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) \\ &= g_n(x)\frac{x^2}{n^2}(1+q^2+\cdots+q^{n-1}) \\ &\leq g_{k_0}(x)\frac{x^2}{n^2}(1+1+\cdots+1) \\ &= \frac{x^2}{n}g_{k_0}(x). \end{aligned}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$0 \leq g_n(x) - f_n(x) \leq \frac{x^2}{n}g_{k_0}(x) \quad \text{untuk} \quad n \geq k_0. \tag{3.2}$$

Dari Pertaksamaam (3.2), misal diberikan $\varepsilon > 0$, jika dipilih suatu bilangan asli $N > \frac{x^2 g_{k_0}(x)}{\varepsilon}$ dengan $N \geq k_0$ maka

$$|g_n(x) - f_n(x) - 0| = g_n(x) - f_n(x) \leq \frac{x^2}{n}g_{k_0} < \varepsilon \quad \text{untuk} \quad n > N.$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty}(g_n(x) - f_n(x)) = 0. \tag{3.3}$$

(d) Misalkan $k_0 = \max\{m_0, n_0\} \geq m_0$. Berdasarkan sifat (b) dan (c), maka

(i) $g_n(x) \leq g_{k_0}(x)$

(ii) Untuk semua $n \geq k_0$,

$$\begin{aligned} g_n(x) - f_n(x) &\geq 0 \quad \text{(dari Pertaksamaan (3.2)} \\ f_n(x) &\leq g_n(x) \leq g_{k_0}(x). \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa barisan $(f_n(x))$ terbatas di atas untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = L$, dimana $L = \sup\{f_n(x) | n \in \mathbb{N}\} = \sup\{f_n(x) | n \geq n_0\}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} g_n(x) &= \lim_{n\to\infty}((g_n(x) - f_n(x)) + f_n(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty}(g_n(x) - f_n(x)) + \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\ &= 0 + L \qquad \text{(dari Persamaan (\textbf{??})} \\ &= L. \end{aligned}$$

Jadi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = L$.

(e) Misalkan $|h| < 1$, pertama akan ditunjukkan $m_0 = n_0 = 1$.
Perhatikan dua kasus berikut:

(i) Untuk $-1 < h \leq 0$, maka $m_0 = 1$ dan $n_0 = [-h] + 1$. Karena h tidak pernah mencapai nilai -1, maka $[-h] = 0$. Akibatnya $m_0 = n_0 = 1$.

(ii) Untuk $0 \leq h < 1$, maka $n_0 = 1$ dan $m_0 = [h] + 1$.Karena h tidak pernah mencapai nilai 1, maka $[h] = 0$. Akibatnya $m_0 = n_0 = 1$.

Dari (i) dan (ii) menunjukkan bahwa $m_0 = n_0 = 1$, serta dari (a), (b), dan (c) diperoleh

$$1 + h = f_1(h) \leq f_n(h) \leq g_n(h) \leq g_1(h) = (1-h)^{-1} \text{ untuk sebarang } n \geq 1. \tag{3.4}$$

. □

Dari Lemma 3.1 telah dibuktikan eksistensi dan kesamaan dari kedua limit yaitu $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Jadi fungsi eksponensial $: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}, x \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Jelas bahwa $\exp(0) = 1$. Nilai dari $\exp(1)$ adalah suatu bentuk khusus yang disebut bilangan e, yang didefinisikan sebagai berikut

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.71828182846.$$

Fungsi yang didefinisikan oleh (3.5) disebut dengan fungsi eksponensial berbasis e, dinotasikan dengan e^x. Berikut diberikan sifat-sifat dari fungsi eksponensial.

Proposisi 3.2. [5] *Misalkan* $x \in \mathbb{R}$.

(i) *Jika* $x > -1$ *maka* $\exp(x) > 1 + x$. *Khususnya,* $\exp(x) > 1$ *untuk* $x > 0$.
(ii) *Jika* $x < 1$ *maka* $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$. *Khususnya,* $\exp(x) < 1$ *jika* $x < 0$.

Bukti. Misalkan $x \in \mathbb{R}$.

(i) Jika $x > -1$ maka $n_0 = \lfloor -x \rfloor + 1 = 1$. Berdasarkan Lemma 3.1 (a) dan (d), diperoleh

$$\exp(x) \geq (1 + \frac{x}{2})^2 > (1 + \frac{x}{1})^1 = 1 + x.$$

(ii) Jika $x < 1$ maka $m_0 = \lfloor x \rfloor + 1 = 1$. Bedasarkan Lemma 3.1 (c), diperoleh $f_n(x) \leq g_n(x)$ untuk setiap $n \geq k_0 = \max\{m_0, n_0\}$. Berdasarkan Lemma 3.1 (b), maka $f_n(x) \leq g_n(x) \leq g_1(x)$. Jika untuk $n \to \infty$, maka berdasarkan Lemma 3.1 (d) diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &\leq g_1(x), \\ &= (1 - \frac{x}{1})^{-1} \\ &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

□

Proposisi 3.3. [5] *Untuk sebarang* $x, y \in \mathbb{R}$ *berlaku*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) = \exp(y)\exp(x).$$

Khususnya

$$\exp(-x) = (\exp(x))^{-1} = \frac{1}{\exp(x)} \quad \textit{untuk setiap } x \in \mathbb{R}.$$

Bukti. Misalkan barisan $(f_n(x)), (f_n(y))$, dan $(f_n(x+y))$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$
$$f_n(y) = \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n, \text{ dan}$$
$$f_n(x+y) = \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n,$$

dimana $n \geq k_0 > |x| + |y|$. Definisikan barisan $(h(n))$ sebagai berikut:

$$h(n) = \frac{xy}{n+x+y}.$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{xy}{n+x+y} = 0.$$

Jika dipilih bilangan yang cukup besar N, sehingga $|h(n)| < 1$ untuk $n \geq N$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{f_n(x)\ \ f_n(y)}{f_n(x+y)} &= \frac{(1+\frac{x}{n})^n\ \ (1+\frac{y}{n})^n}{(1+\frac{x+y}{n})^n} \\ &= \frac{(n+x)^n\ \ (n+y)^n}{n^n\ \ (n+x+y)^n} \\ &= \left(\frac{n^2+nx+ny+xy}{n^2+nx+ny}\right)^n \\ &= \left(1 \ + \ \frac{h(n)}{n}\right)^n \text{ untuk semua } n \geq N. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Berdasarkan pertaksamaan (3.2) dan pertaksamaan (3.4) jelas bahwa

$$1 + h(n) \leq (1 + \frac{h(n)}{n})^n = \frac{f_n(x)\ \ f_n(y)}{f_n(x+y)} \leq (1 - h(n))^{-1}.$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} (1 + h(n)) = \lim_{n\to\infty} 1 \ + \ \lim_{n\to\infty} h(n) = 1 + 0 = 1$$
dan
$$\lim_{n\to\infty} (1 - h(n))^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - h(n)} = 1$$

Karena $\lim_{n\to\infty}(1 + h(n)) = \lim_{n\to\infty}(1 - h(n))^{-1} = 1$, sehingga diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)\ \ f_n(y)}{f_n(x+y)} = 1.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{\exp(x)\ \ \exp(y)}{\exp(x+y)} &= \frac{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \ \lim_{n\to\infty} f_n(y)}{\lim_{n\to\infty} f_n(x+y)} \\
\frac{\exp(x)\ \ \exp(y)}{\exp(x+y)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)\ \ f_n(y)}{f_n(x+y)} \\
\frac{\exp(x)\ \ \exp(y)}{\exp(x+y)} &= 1 \\
\exp(x)\ \ \exp(y) &= \exp(x+y).
\end{aligned}$$

□

Proposisi 3.4. [5] *Misalkan* $t, x \in \mathbb{R}$ *jika* $t < x$, *maka* $\exp(t) < \exp(x)$ *dan fungsi ini naik sejati pada* $\mathbb{R}$.

Bukti. Jika $x > t$ maka $x - t > 0$ dan berdasarkan Lema 3.1 (1), maka $\exp(x-t) > 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \exp((x-t)+t), \\
&= \exp(x-t)\ \ \exp(t) > 1\ \ \exp(t), \\
&= \exp(t).
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\exp(t) < \exp(x)$. □

Proposisi 3.5. [5] *Jika* $x > 0$ *maka* $0 < \exp(x) - 1 \leq x \exp(x)$.

Bukti. Misalkan $n \in \mathbb{N}$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
0 < \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n - 1 &= (1 + \frac{x}{n} - 1)\Big(\big(1 + \frac{x}{n}\big)^{n-1} + \big(1 + \frac{x}{n}\big)^{n-2} + ... + 1\Big) \\
&< \frac{x}{n}\Big(\big(1 + \frac{x}{n}\big)^n + \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n + ... + \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n\Big) \\
&= \frac{x}{n} n \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n = x\big(1 + \frac{x}{n}\big)^n < x \exp(x).
\end{aligned}$$

Akibatnya

$$0 < \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n - 1 < x \exp(x) \text{ untuk sebarang } n \in \mathbb{N}.$$

Jika $n \to \infty$, pertaksamaan terakhir menjadi

$$0 < \exp(x) - 1 \leq x \exp(x). \tag{3.7}$$

□

Proposisi 3.6. [5] *Fungsi eksponensial adalah fungsi kontinu pada* $\mathbb{R}$, *yaitu apabila diberikan suatu bilangan* $a \in \mathbb{R}$ *dan sebarang* $\varepsilon > 0$, *maka dapat diperoleh suatu bilangan* $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ *sedemikian sehingga jika* $|x - a| < \delta$ *maka* $|\exp(x) - \exp(a)| < \varepsilon$.

Bukti. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa pertaksamaan berikut berlaku.

$$\exp(t) - 1| \leq 3|t| \text{ untuk } |t| < 1. \tag{3.8}$$

(a) Kasus $t = 0$, jelas bahwa pertaksamaan ini berlaku.
(b) Kasus $t \neq 0$:

(1) Jika $0 < t < 1$ maka $\exp(t) < \exp(1) = e < 3$. Akibatnya, berdasarkan Pertaksamaan (3.7) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &< \exp(t) - 1 \leq t\exp(t) \\ 0 &< \exp(t) - 1 < 3t. \end{aligned}$$

(2) Jika $-1 < t < 0$, maka berlaku Lema 3.1 (1), yaitu $\exp(t) < 1$. Dilain hal, $0 < -t < 1$ dan akibatnya

$$0 < \exp(-t) - 1 < 3(-t) = 3|t|.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |\exp(t) - 1| &= |\exp(t) - \exp(t) \quad \frac{1}{\exp(t)}| \\ &= |\exp(t) - \exp(t) \quad (\exp(t))^{-1}| \\ &= |\exp(t) - \exp(t) \quad \exp(-t)| \\ &= |\exp(t)(1 - \exp(-t)| \\ &= |\exp(t)| \quad |1 - \exp(-t)| \\ &= |\exp(t)| \quad |-(\exp(-t) - 1)| \\ &= |\exp(t)| \quad |-1| \quad |(\exp(-t) - 1)| \\ &= \exp(t) \quad 1 \quad (\exp(-t) - 1) \\ &< \exp(t)\ 3|t| = 3 \ \exp(t)\ |t| < 3\ |t|. \end{aligned}$$

Pertaksamaan (3.8) telah terbukti. Misalkan $\varepsilon > 0$ dan $a \in \mathbb{R}$. Perhatikan nilai dari x dimana $|x - a| < 1$. Pilih $t = x - a$ untuk Pertaksamaan (3.8) sehingga diperoleh:

$$|\exp(t) - 1| = |\exp(x - a) - 1| < 3 \quad |x - a|.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(a)| &= |\exp(t + a) - \exp(a)| \\ &= |\exp(t)\exp(a) - \exp(a)| \quad \text{dari Pertaksamaan (3.6)} \\ &= |\exp(a)| \quad |\exp(t) - 1| \\ &< \exp(a)\ 3\ |x - a| = 3 \ \exp(a)\ |x - a|. \end{aligned}$$

Akibatnya, pilih

$$\delta(\varepsilon) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3\exp(a)}\right\},$$

maka berlaku

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\exp(x) - \exp(a)| = |\exp(t + a) - \exp(a)| < \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa $f(x) = \exp(x)$ kontinu seragam di $\mathbb{R}$. Hal ini juga menunjukkan bahwa $f(x) = \exp(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$. $\square$

4. Kesimpulan

Fungsi eksponensial yang berbasis e dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}, x \in \mathbb{R},$$

dan memiliki beberapa sifat, antara lain sebagai berikut:

(1) Misalkan $x \in \mathbb{R}$.

  (i) Jika $x > -1$ maka $\exp(x) > 1 + x$. Khususnya, $\exp(x) > 1$ untuk $x > 0$.

  (ii) Jika $x < 1$ maka $\exp(x) \le \frac{1}{1-x}$. Khususnya, $\exp(x) < 1$ jika $x < 0$.

(2) Sifat perkalian eksponensial, yaitu

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) = \exp(y)\exp(x) \text{ untuk sebarang } x, y \in \mathbb{R}.$$

Khususnya

$$\exp(-x) = (\exp(x))^{-1} = \frac{1}{\exp(x)} \text{ untuk setiap } x \in \mathbb{R}.$$

(3) Misalkan $t, x \in \mathbb{R}$ dengan $t < x$, maka $\exp(t) < \exp(x)$ dan fungsi ini naik sejati pada $\mathbb{R}$.

(4) Jika $x > 0$ maka $0 < \exp(x) - 1 \le x\exp(x)$.

(5) Fungsi eksponensial adalah fungsi kontinu pada $\mathbb{R}$.

5. *Ucapan Terima kasih*

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Dodi Devianto, Bapak Zulakmal, M.Si dan Ibu Dr. Yanita yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] Bartle, R.G. and D.R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley and Sons

[2] Clark, W. Edwin. 2002. *Elementary Number Theory*. Florida: Department of Mathematics University of South Florida

[3] Finney, Ross L., Franklin D. Demana, Bert K. Waits, and Daniel Kennedy. 2000. *Calculus: A Complete Course*, Second Edition. Amerika: Addison Wesley Longman

[4] Morris, Dave Witte and Joy Morris. 2009. *Proofs and Concepts the Fundamentals of Abstract Mathematics*. New York: University at Albany

[5] Salas, Alvaro H. 2012. The exponential function as a limit. *Applied Mathematical Sciences*. **6**: 4519 – 4526