Jurnal Matematika UNAND
Vol. **1** No. **1** Hal. 56 – 62
ISSN : 2303–291X

KELAS RAMSEY MINIMAL UNTUK KOMBINASI DUA GRAF LINTASAN P_3 DAN P_4

RIRI SRI WAHYUNI

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas Padang,
Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163, Indonesia
Ririsriwahyuni@rocketmail.com

Abstrak. Diberikan dua graf G dan H. Notasi $F \to (G,H)$ berarti bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F, terdapat subgraf merah yang memuat graf G atau subgraf biru yang memuat graf H. Graf F disebut sebagai *graf Ramsey* (G,H)*-minimal* jika $F \to (G,H)$ dan $F - e \nrightarrow (G,H)$ untuk sebarang sisi e di F. Semua graf Ramsey (G,H)-minimal dikelompokkan dalam kelas yang dinamakan *kelas Ramsey* (G,H)*-minimal*, dinotasikan dengan $\mathcal{R}(G,H)$. Dalam makalah ini akan dikaji kembali tentang graf yang tidak memuat pohon dan daun yang menjadi anggota $\mathcal{R}(P_3,P_4)$.
Kata Kunci: *Graf Ramsey minimal, lintasan.*

1 Pendahuluan

Graf yang dikaji pada makalah ini adalah graf sederhana, yaitu graf yang tidak memuat sisi ganda dan loop. Misal diberikan graf G dan H sebarang. Notasi $F \to (G,H)$ berarti bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F, terdapat subgraf merah yang memuat graf G atau subgraf biru yang memuat graf H. Graf F disebut sebagai *graf Ramsey* (G,H)*-minimal* jika $F \to (G,H)$ dan $F - e \not\to (G,H)$ untuk sebarang sisi e di F. Semua graf Ramsey (G,H)-minimal dikelompokkan dalam kelas yang dinamakan *kelas Ramsey* (G,H)*-minimal*, dinotasikan dengan $\mathcal{R}(G,H)$. Suatu *pewarnaan*-(G,H) pada graf F didefinisikan sebagai pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F, sedemikian sehingga tidak terdapat graf G merah dan juga H biru.

Karena tingkat kesulitan yang cukup tinggi dalam menentukan anggota $\mathcal{R}(G,H)$, maka hasil yang diperoleh masih sangat sedikit, bahkan untuk graf G dan H yang berukuran kecil atau yang berstruktur sederhana sekalipun. Beberapa hasil terakhir terkait dengan penentuan karakteristik dari semua graf yang tergolong pada $\mathcal{R}(G,H)$, dimana $G \cong P_3$ adalah sebagai berikut.

Dalam [4] Burr dkk. membuktikan bahwa $\mathcal{R}(P_3,H)$ terbatas jika H adalah graf terhubung. Borowiecki dkk. [1] memberikan beberapa karakterisasi dari semua graf di $\mathcal{R}(P_3,K_{1,m})$ untuk $m \geq 3$. Selanjutnya, Borowiecki dkk. [2] mengkarakterisasikan semua graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(P_3,K_3)$. Faudree dan Sheehan [3] mendefinisikan kelas $R^T(G,H)$, yang memuat semua pohon T dengan syarat $T \to (G,H)$ untuk pohon G dan H sebarang; tapi $T - e \not\to (G,H)$ untuk sebarang sisi e di T. Mereka memberikan beberapa karakterisasi graf pohon T yang termuat pada $\mathcal{R}^T(K_{1,k},P_n)$ untuk $k \geq 2$ dan $n \geq 4$. Selanjutnya mereka juga memperoleh beberapa pohon di $\mathcal{R}^T(P_3,P_4)$ dan $\mathcal{R}^T(P_3,P_5)$. Makalah ini merupakan kajian ulang dari rujukan [5], yang membahas tentang graf tanpa pohon dan daun yang menjadi anggota $\mathcal{R}(P_3, P_4)$.

2 Graf Ramsey (P_3, P_4)-minimal

Kelas $\mathcal{R}(P_3, P_4)$ didefinisikan sebagai kelas Ramsey minimal untuk kombinasi (P_3, P_4). Sementara $\mathcal{R}^T(P_3, P_4)$ didefinisikan sebagai kelas Ramsey (P_3, P_4)-minimal yang memuat semua pohon yang termasuk dalam $\mathcal{R}(P_3, P_4)$. Selanjutnya $\mathcal{R}^*(P_3, P_4)$ didefinisikan sebagai kelas Ramsey (P_3, P_4)-minimal yang tidak memuat pohon. Kemudian $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ didefinisikan sebagai kelas Ramsey (P_3, P_4)-minimal yang tidak memuat pohon dan daun. Sedangkan $\mathcal{R}_2^*(P_3, P_4)$ didefinisikan sebagai kelas Ramsey (P_3, P_4)-minimal yang tidak memuat pohon tetapi memuat daun.

Pada bagian ini ditentukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$, yaitu kelas Ramsey minimal untuk pasangan (P_3, P_4) yang tidak memuat pohon dan daun. Jelas bahwa $F \in \mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ harus memuat paling sedikit satu siklus. Pada setiap pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F, didefinisikan E_{merah} sebagai himpunan dari semua sisi merah di F dan E_{biru} sebagai himpunan dari semua sisi biru di graf tersebut. Dapat dilihat bahwa graf kC_n untuk $k \geq 1$ dan $n \geq 4$ dapat diwarnai dengan merah dan biru, sedemikian sehingga graf tersebut memiliki pewarnaan-(P_3, P_4). Akan dicari graf terhubung terkecil yang memuat setidaknya dua siklus tanpa daun. Pada subbab berikut akan dikaji dua kelas graf yang memuat graf anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

3 Kelas $\mathcal{M}(n_1, n_2)$ dengan $n_1, n_2 \geq 4$

Misal C_{n_1} dan C_{n_2} merupakan dua siklus dengan panjang $n_1 \geq 4$ dan $n_2 \geq 4$. Misal x adalah titik sebarang di C_{n_1} dan y titik sebarang di C_{n_2}. Graf $M(n_1, n_2)$ dibentuk dengan mengidentifikasi titik x dan y menjadi titik w. Notasikan kelas dari semua $M(n_1, n_2)$ sebagai $\mathcal{M}(n_1, n_2)$.

Berikut adalah himpunan titik dan himpunan sisi graf $M(n_1, n_2)$ untuk $n_1, n_2 \geq 4$.

$$\begin{aligned}
V(M(n_1, n_2)) &= \{w, u_1, u_2, \cdots, u_{n_1-1}, v_1, v_2, \cdots, v_{n_2-1}\}, \\
E(M(n_1, n_2)) &= E_1 \cup E_2 \cup E_3, \text{ di mana} \\
E_1 &= \{wu_1, wu_{n_1-1}, wv_1, wv_{n_2-1}\}, \\
E_2 &= \{u_i u_{i+1} | i = 1, \cdots, n_1 - 2\}, \\
E_3 &= \{v_j v_{j+1} | j = 1, \cdots, n_2 - 2\}.
\end{aligned}$$

Definisi berikut digunakan untuk membuktikan kembali teorema yang menjadi hasil utama kajian makalah ini.

Definisi 1. *Misal $C_t := wx_1x_2 \cdots x_{t-1}w$ adalah siklus dengan panjang $t \geq 4$. Jika t bilangan genap, maka didefinisikan suatu E-pewarnaan sebagai 2-pewarnaan dari graf siklus C_t sedemikian sehingga*

$$E_{merah} = \{x_i x_{i+1} | i = 1, 3, \cdots, t/2 - 2, t/2 + 1, \cdots, t - 2\}$$

, dan semua sisi yang tersisa berada di E_{biru}. Jika t bilangan ganjil, maka suatu O-pewarnaan adalah 2-pewarnaan sedemikian sehingga

$$E_{merah} = \{x_j x_{j+1} | j = 1, 3, \cdots, \lceil t/2 \rceil, \lceil t/2 \rceil + 1, \cdots, t - 2\}$$

, dan semua sisi yang tersisa berada di E_{biru}.

Teorema 1. *Misal* n_1, n_2 *adalah bilangan asli dengan* $n_1, n_2 \geq 4$. *Jika* $M(n_1, n_2)$ *menjadi anggota* $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ *maka haruslah* $n_1, n_2 = 4$.

Bukti. Misalkan $n_1 = n_2 = 4$. Pertama-tama, ditunjukkan $M(4,4) \to (P_3, P_4)$. Asumsikan bahwa tidak ada P_3 merah di $M(4,4)$. Maka terdapat maksimal dua sisi merah yang saling bebas dalam graf tersebut. Kemudian semua sisi tersisa diwarnai biru. Jelas bahwa himpunan sisi-sisi biru ini akan memuat P_4 biru. Sehingga $M(4,4) \to (P_3, P_4)$. Selanjutnya, ditunjukkan $M(4,4) - e \nrightarrow (P_3, P_4)$ untuk setiap $e \in E(M(4,4))$. Misal $e \in E_1$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = wu_1$. Maka sisi wv_1, v_2v_3 dan u_2u_3 diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa dengan biru, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru pada pewarnaan tersebut. Selanjutnya, misalkan $e \in E_2$ atau $e \in E_3$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = u_1u_2$. Maka sisi wv_3, v_1v_2 dan u_2u_3 diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa dengan biru, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru dalam graf tersebut. Maka diperoleh $M(4,4) \in \mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Selanjutnya tanpa mengurangi perumuman, misalkan $n_1 = 4$ dan $n_2 \neq 4$. Warnai sebarang dua sisi yang saling bebas di C_4 dengan merah dan sisi yang tersisa diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan yang sesuai (E- atau O-pewarnaan) untuk C_{n_2}, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru pada graf tersebut. Maka graf-graf di $\mathcal{M}(4, n_2)$ dengan $n_2 \neq 4$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Kemudian tanpa mengurangi perumuman, misalkan $n_1 \neq 4$ dan $n_2 \neq 4$. Diterapkan pewarnaan yang sesuai (E- atau O-pewarnaan) untuk C_{n_1} dan C_{n_2}, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru pada graf tersebut. Maka graf-graf di $\mathcal{M}(n_1, n_2)$ dengan n_1, $n_2 \neq 4$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

4 Kelas $\Theta(k,l,m)$ dengan $m \geq l \geq k \geq 1$

Didefinisikan *graf theta* $\theta(k,l,m)$ dengan $m \geq l \geq k \geq 1$ sebagai gabungan dari tiga lintasan dengan panjang k, l dan m yang memiliki dua titik akhir yang sama, yaitu x dan y. Notasikan kelas dari semua $\theta(k,l,m)$ sebagai $\Theta(k,l,m)$ dan lintasan di $\theta(k,l,m)$ sebagai P_{k+1}, P_{l+1} dan P_{m+1} untuk $m \geq l \geq k \geq 1$.

Didefinisikan titik-titik dan sisi-sisi dari $\theta(k,l,m)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(\theta(k,l,m)) &= \{x,y\} \cup \{u_1,u_2,\cdots,u_{k-1}\} \cup \{v_1,v_2,\cdots,v_{l-1}\} \cup \{w_1,w_2,\cdots,w_{m-1}\} \\ E(\theta(k,l,m)) &= \{xu_1,xv_1,xw_1,yu_{k-1},yv_{l-1},yw_{m-1}\} \cup \{u_iu_{i+1} \mid i=1,2,\cdots,k-2\} \\ &\quad \cup \{v_jv_{j+1} \mid j=1,2,\cdots,l-2\} \cup \{w_tw_{t+1} \mid i=1,2,\cdots,m-2\}. \end{aligned}$$

Berikut adalah definisi dan lema yang akan digunakan dalam pembuktian teorema utama.

Definisi 2. *Misal* $P_{t+1} := xz_1z_2\cdots z_{t-1}y$ *adalah lintasan dengan panjang* $t \geq 1$. *Maka didefinisikan beberapa pewarnaan dari* P_{t+1} *sebagai berikut. Untuk* $t+1$ *bilangan genap, didefinisikan*

– E_1-pewarnaan*:*

$$E_{merah} = \{xz_1, z_2z_3, \cdots, z_{t/2-1}z_{t/2}, z_{t/2+2}z_{t/2+3}, \cdots, z_{t-3}z_{t-2}, z_{t-1}y\}.$$

– E_2-pewarnaan:

$$E_{merah} = \{xz_1, z_2z_3, \cdots, z_{t/2-1}z_{t/2}, z_{t/2+1}z_{t/2+2}, \cdots, z_{t-4}z_{t-3}, z_{t-2}z_{t-1}\}.$$

– E_3-pewarnaan:

$$E_{merah} = \{z_1z_2, z_3z_4, \cdots, z_{t/2}z_{t/2+1}, z_{t/2+3}z_{t/2+4}, \cdots, z_{t-4}z_{t-3}, z_{t-2}z_{t-1}\}.$$

Untuk $t+1$ bilangan ganjil, didefinisikan

– O_1-pewarnaan:

$$E_{merah} = \{xz_1, z_2z_3, \cdots, z_{\lceil t/2\rceil-1}z_{\lceil t/2\rceil}, z_{\lceil t/2\rceil+1}z_{\lceil t/2\rceil+2}, \cdots, z_{t-3}z_{t-2}, z_{t-1}y\}.$$

– O_2-pewarnaan:

$$E_{merah} = \{xz_1, z_2z_3, \cdots, z_{\lceil t/2\rceil-1}z_{\lceil t/2\rceil}, z_{\lceil t/2\rceil+2}z_{\lceil t/2\rceil+3}, \cdots, z_{t-4}z_{t-3}, z_{t-2}z_{t-1}\}.$$

– O_3-pewarnaan:

$$E_{merah} = \{z_1z_2, z_3z_4, \cdots, z_{\lceil t/2\rceil}z_{\lceil t/2\rceil+1}, z_{\lceil t/2\rceil+2}z_{\lceil t/2\rceil+3}, \cdots, z_{t-4}z_{t-3}, z_{t-2}z_{t-1}\}.$$

Pada setiap kasus, semua sisi yang tersisa berada di E_{biru}.

Lema 1. *Misal $k = 1$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$. Maka satu-satunya graf di $\Theta(1, l, m)$, $l \geq 2$, $m \geq 2$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ adalah $\theta(1, 2, 2)$.*

Bukti. Misalkan $k = 1, l = 2$ dan $m = 2$. Pertama-tama, ditunjukkan $\theta(1, 2, 2) \rightarrow (P_3, P_4)$. Asumsikan tidak ada P_3 merah di $\theta(1, 2, 2)$. Maka terdapat paling banyak dua sisi merah yang saling bebas dalam graf tersebut. Kemudian sisi-sisi yang tersisa diwarnai biru. Maka diperoleh bahwa terdapat P_4 biru pada pewarnaan sebarang tersebut. Selanjutnya, ditunjukkan $\theta(1, 2, 2) - e \not\rightarrow (P_3, P_4)$ untuk setiap $e \in E(\theta(1, 2, 2))$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = v_1y$. Maka sisi v_1x dan w_1y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa dengan biru, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru dalam graf tersebut. Maka $\theta(1, 2, 2) \in \mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Misalkan $k = 1$, $l = 2$ dan $m \geq 3$, maka dapat diatur pewarnaan sebagai berikut. Asumsikan tidak ada P_3 merah pada graf tersebut, maka sisi di P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan E_1 pada P_{m+1} untuk m bilangan genap atau pewarnaan O_1 pada P_{m+1} untuk m bilangan ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\Theta(1, 2, m)$ dengan $m \geq 3$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Selanjutnya, misalkan $k = 1$, $l \geq 3$, $l \neq 4$ dan $m \geq 3$, $m \neq 4$, maka dapat diatur pewarnaan sebagai berikut. Asumsikan sisi di P_{k+1} diwarnai dengan merah. Kemudian diterapkan pewarnaan E_3 atau O_3 yang sesuai pada P_{l+1} dan P_{m+1} dengan mengasumsikan l dan m bilangan ganjil atau genap, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\Theta(1, l, m)$ dengan $l \geq 3, l \neq 4, m \geq 3, m \neq 4$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Perhatikan bahwa jika paling sedikit salah satu dari l atau m sama dengan 4, maka semua graf dalam $\Theta(1, l, m)$ dengan sifat ini bukanlah graf minimal untuk pasangan (P_3, P_4), karena memuat salah satu graf di $\mathcal{R}_2^*(P_3, P_4)$ sebagai subgrafnya [**5**].

Lema 2. *Misal $k = 2$, $l \geq 2$ dan $m \geq 2$, maka graf di $\Theta(2, l, m)$, $l \geq 2$, $m \geq 2$ yang menjadi anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ adalah $\theta(2, 2, 2)$, $\theta(2, 2, 4)$, dan $\theta(2, 4, 4)$.*

Bukti. Misalkan $k = 2, l = 2$ dan $m = 2$. Pertama-tama, ditunjukkan $\theta(2,2,2) \rightarrow (P_3, P_4)$. Asumsikan tidak ada P_3 merah di $\theta(2,2,2)$. Maka terdapat paling banyak dua sisi merah yang saling bebas sebarang dalam graf tersebut. Kemudian sisi yang tersisa diwarnai dengan biru, sedemikian sehingga tidak memuat P_3 merah tetapi memuat P_4 biru di sisi yang tersisa pada $\theta(2,2,2)$. Selanjutnya, ditunjukkan $\theta(2,2,2) - e \not\rightarrow (P_3, P_4)$ untuk setiap $e \in E(\theta(2,2,2))$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = xw_1$. Maka sisi xu_1 dan v_1y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa dengan biru, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru dalam graf tersebut. Maka $\theta(2,2,2) \in \mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Misalkan $k = 2$, $l = 2$ dan $m = 4$. Pertama-tama, ditunjukkan $\theta(2,2,4) \rightarrow (P_3, P_4)$. Asumsikan tidak ada P_3 merah di $\theta(2,2,4)$. Maka sisi xu_1 dan v_1y diwarnai dengan merah. Kemudian sisi yang tersisa pada P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Terapkan pewarnaan E_3 pada P_{m+1}, sedemikian sehingga tidak memuat P_3 merah tetapi memuat P_4 biru di sisi yang tersisa pada $\theta(2,2,4)$. Selanjutnya, ditunjukkan $\theta(2,2,4) - e \not\rightarrow (P_3, P_4)$ untuk setiap $e \in E(\theta(2,2,4))$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = u_1y$. Maka sisi v_1y diwarnai dengan merah. Kemudian sisi yang tersisa pada P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Terapkan pewarnaan E_3 pada P_{m+1}, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru dalam graf tersebut. Maka $\theta(2,2,4) \in \mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Misalkan $k = 2$, $m \geq 3$ dan $m \neq 4$. Maka diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi xv_1 dan u_1y diwarnai dengan merah. Kemudian sisi yang tersisa pada P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Terapkan pewarnaan E_3 atau O_3 di P_{m+1} dengan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\Theta(2,2,m)$ dengan $m \geq 3, m \neq 4$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Misalkan $k = 2$, $l = 3$ dan $m = 3$. Maka diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi xu_1, v_1v_2 dan w_1w_2 diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa dengan biru, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf $\theta(2,3,3)$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Selanjutnya, misalkan $k = 2$, $l = 3$ dan $m \geq 4$. Maka diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi u_1y dan v_1v_2 diwarnai dengan merah. Kemudian sisi yang tersisa pada P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Terapkan pewarnaan E_2 atau O_2 di P_{m+1}, dengan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\Theta(2,3,m)$ dengan $m \geq 3$ bukan anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Misalkan $k = 2$, $l = 4$ dan $m = 4$. Pertama-tama, ditunjukkan $\theta(2,4,4) \rightarrow (P_3, P_4)$. Asumsikan tidak ada P_3 merah di $\theta(2,4,4)$. Maka sisi v_1y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{k+1} diwarnai dengan biru. Kemudian terapkan pewarnaan E_2 pada P_{l+1} dan pewarnaan E_3 pada P_{m+1}, sedemikian sehingga tidak memuat P_3 merah tetapi memuat P_4 biru di sisi yang tersisa pada $\theta(2,4,4)$. Selanjutnya ditunjukkan $\theta(2,4,4) - e \not\rightarrow (P_3, P_4)$ untuk setiap $e \in E\theta(2,4,4))$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e = u_1u_2$. Maka sisi u_2u_3 dan v_1y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Kemudian terapkan pewarnaan E_2 pada P_{m+1}, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru dalam graf tersebut. Maka $\theta(2,4,4) \in \mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$.

Misalkan $m \geq 5$, maka dapat diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi xv_1, v_2v_3 dan u_1y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{k+1} dan P_{l+1} diwarnai dengan biru. Terapkan pewarnaan E_3 atau O_3 di P_{m+1}, dengan mengasumsikan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau

P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\Theta(2,4,m)$ dengan $m \geq 5$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3,P_4)$.

Misalkan $l \geq 5$ dan $m \geq 5$, maka diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi u_1y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{k+1} diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan E_3 atau O_3 pada P_{l+1} dan P_{m+1}, dengan mengasumsikan l dan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\Theta(2,l,m)$ dengan $l,m \geq 5$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3,P_4)$.

Lema 3. *Misal $k=3$, $l \geq 3$ dan $m \geq 3$. Maka tidak terdapat graf di $\Theta(3,l,m)$, $l \geq 3$, $m \geq 3$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3,P_4)$.*

Bukti. Misalkan $k=3$, $l \geq 3$ dan $m \geq 3$, maka diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi u_1u_2 diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{k+1} diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan E_3 atau O_3 untuk P_{l+1} dan pewarnaan E_1 atau O_1 untuk P_{m+1}, dengan mengasumsikan l dan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\Theta(3,l,m)$ dengan $l,m \geq 3$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3,P_4)$.

Lema 4. *Misal $k=4$, $l \geq 4$ dan $m \geq 4$, satu-satunya graf di $\Theta(4,l,m)$,$l \geq 4$,$m \geq 4$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3,P_4)$ adalah $\theta(4,4,4)$.*

Bukti. Misalkan $k=4, l=4$ dan $m=4$. Pertama-tama, ditunjukkan $\theta(4,4,4) \rightarrow (P_3,P_4)$. Sisi u_1u_2 diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{k+1} diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan E_2 pada P_{l+1} dan pewarnaan E_3 pada P_{m+1}, sedemikian sehingga tidak memuat P_3 merah tetapi memuat P_4 biru di sisi yang tersisa dalam $\theta(4,4,4)$. Selanjutnya, ditunjukkan $\theta(4,4,4)-e \not\rightarrow (P_3,P_4)$ untuk setiap $e \in E(\theta(4,4,4))$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $e=v_1v_2$. Maka sisi v_2v_3 diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa di P_{l+1} diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan E_2 pada P_{k+1} dan P_{m+1}, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah dan P_4 biru dalam graf tersebut. Maka $\theta(4,4,4) \in \mathcal{R}_1^*(P_3,P_4)$.

Misalkan $k=4$, $l \geq 5$ dan $m \geq 5$. Maka diatur pewarnaan sebagai berikut. Sisi u_1u_2 dan u_3y diwarnai dengan merah dan sisi yang tersisa pada P_{k+1} diwarnai dengan biru. Kemudian diterapkan pewarnaan E_2 atau O_2 untuk P_{l+1} dan pewarnaan E_3 atau O_3 untuk P_{m+1}, dengan l dan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\Theta(4,l,m)$ dengan $l,m \geq 5$ bukan anggota dari $\mathcal{R}_1^*(P_3,P_4)$.

Lema 5. *Misal $k \geq 5$, $l \geq 5$ dan $m \geq 5$, tidak terdapat graf di $\Theta(k,l,m), k \geq 5, l \geq 5, m \geq 5$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3,P_4)$.*

Bukti. Misalkan $\theta(k,l,m)$ dengan $k,l,m \geq 5$, diatur pewarnaan sebagai berikut. Terapkan pewarnaan E_1 atau O_1 untuk P_{k+1}, pewarnaan E_3 atau O_3 untuk P_{l+1} dan P_{m+1}, dengan ketentuan k, l dan m bilangan genap atau ganjil, sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah atau P_4 biru dalam graf tersebut. Maka graf-graf di $\Theta(k,l,m)$ dengan $k,l,m \geq 5$ bukan anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3,P_4)$.

Berdasarkan Lema 1 – Lema 5, diperoleh teorema berikut yang menjadi hasil utama kajian makalah ini.

Teorema 2. *Misal $m \geq l \geq k \geq 1$, graf di $\Theta(k,l,m)$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3,P_4)$ adalah $\theta(1,2,2)$, $\theta(2,2,2), \theta(2,2,4), \theta(2,4,4)$ dan $\theta(4,4,4)$.*

5 Kesimpulan

Misalkan C_{n_1} dan C_{n_2} merupakan dua siklus dengan panjang $n_1 \geq 4$ dan $n_2 \geq 4$. Misal x adalah titik sebarang di C_{n_1} dan y titik sebarang di C_{n_2}. Graf $M(n_1, n_2)$ dibentuk dengan mengidentifikasi titik x dan y menjadi titik w. Kelas dari semua $M(n_1, n_2)$ dinotasikan sebagai $\mathcal{M}(n_1, n_2)$. Pada makalah ini telah dikaji kembali bahwa satu-satunya graf di $\mathcal{M}(n_1, n_2)$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ adalah $M(4, 4)$.

Graf *theta* $\theta(k, l, m)$ dengan $m \geq l \geq k \geq 1$ adalah gabungan dari tiga lintasan dengan panjang k, l dan m yang memiliki dua titik akhir yang sama, yaitu x dan y. Kelas dari semua $\theta(k, l, m)$ dinotasikan sebagai $\Theta(k, l, m)$ dan lintasan di $\theta(k, l, m)$ sebagai P_{k+1}, P_{l+1} dan P_{m+1} untuk $m \geq l \geq k \geq 1$. Pada makalah ini telah dikaji kembali bahwa graf-graf di $\Theta(k, l, m)$ yang menjadi anggota $\mathcal{R}_1^*(P_3, P_4)$ adalah $\theta(1, 2, 2)$, $\theta(2, 2, 2)$, $\theta(2, 2, 4)$, $\theta(2, 4, 4)$ dan $\theta(4, 4, 4)$.

6 Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Lyra Yulianti, Bapak Syafrizal Sy, Bapak Ahmad Iqbal Baqi dan Bapak Zulakmal yang telah memberikan pengarahan, kritik dan saran untuk perbaikan penulisan sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

7 Daftar Pustaka

1. M. Borowiecki, M. Haluszczak and E. Sidorowicz, On Ramsey-minimal graphs, *Discrete Math.* **286**(1-2) (2004), 37 – 43
2. M. Borowiecki, I. Schiermeyer and E. Sidorowicz, Ramsey $(K_{1,2}, K_3)$-minimal graphs, *Electron. J. Combin.* **12** (2005), R20
3. R. J. Faudree and J. Sheehan, Tree Ramsey-minimal graphs, *Congressus Numer.* **35** (1982), 295 – 315.
4. S. A. Burr, P. Erdos, R. J. Faudree, C. C. Rousseau and R. H. Schelp, Ramsey-minimal graphs for the pair star, connected graphs, *Studia Sci. Math. Hungar.* **15** (1-3) (1980), 265 – 273.
5. Yulianti, L., Assiyatun, H., Uttunggadewa, S., dan Baskoro, E. T. (2010) : On Ramsey $(K_{1,2}, P_4)$-Minimal Graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, **40** : 23 – 36.