BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF $C_n \odot \overline{K}_m$, DENGAN $n \geq 3$ DAN $m \geq 1$

MERY ANGGRAINI, NARWEN

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 meryanggraini09@yahoo.com*

Abstrak. Misalkan G merupakan graf terhubung dan c merupakan pewarnaan k yang sesuai dari G dengan warna $1, 2, \dots, k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang saling bebas, dimana S_i merupakan himpunan dari titik yang diberi warna i , dengan $1 \leq i \leq k$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik v merupakan vektor dengan banyak unsur k yaitu

$$(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i)$ adalah jarak dari v ke S_i , dengan $1 \leq i \leq k$. Jika untuk setiap dua titik yang berbeda u, v di G , $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$, maka c disebut sebagai pewarnaan kromatik lokasi dari G . Pewarnaan lokasi dengan banyak warna yang digunakan minimum disebut pewarnaan lokasi minimum, dan kardinalitas dari himpunan yang memuat pewarnaan lokasi minimum disebut bilangan kromatik lokasi dari G , dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Graf korona $G \odot H$ dari dua graf G dan H adalah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan sebanyak $|V(G)|$ duplikat $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$ dari H , kemudian menghubungkan titik ke- i dari graf G ke setiap titik di H_i , $i = 1, 2, 3, \dots, |V(G)|$. Pada tulisan ini, akan dikaji kembali makalah [2] tentang bilangan kromatik lokasi dari graf $C_n \odot \overline{K}_m$, $n \geq 3$ dan $m \geq 1$.

Kata Kunci: Bilangan kromatik lokasi, Graf korona

1. Pendahuluan

Misalkan terdapat graf G dan H sebarang. **Graf hasil korona** antara graf G dan H dinotasikan dengan $G \odot H$. Misalkan $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $V(H_i) = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}\}$, dimana H_i adalah duplikat ke- i dari graf H . Maka graf $G \odot H$ mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i=1}^n V(H_i),$$

$$E(G \odot H) = E(G) \cup \bigcup_{i=1}^n E(H_i) \cup \{x_i a_{ij} | 1 \leq j \leq m, a_i \in V(H_i)\},$$

dengan H_i adalah duplikat dari graf H . Dapat dilihat bahwa :

$$|V(G \odot H)| = |V(G)| + |V(G)| \cdot |V(H)|,$$

$$|E(G \odot H)| = |E(G)| + |V(G)| \cdot |E(H)| + |V(G)| \cdot |V(H)|.$$

Pada tulisan ini akan dikaji kembali makalah [2], yang membahas tentang bilangan kromatik lokasi dari graf $C_n \odot \overline{K}_m$, $n \geq 3$ dan $m \geq 1$, dimana $\overline{K}_m$ adalah komplemen dari graf lengkap K_m dengan m titik.

2. Bilangan Kromatik Lokasi

Pewarnaan titik (*vertex coloring*) pada graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan $c : V \rightarrow \mathbb{N}$, dimana $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli sedemikian sehingga $c(v) \neq c(w)$ jika v dan w bertetangga. Jika banyaknya warna yang digunakan sebanyak k maka G dikatakan mempunyai k -pewarnaan. **Bilangan kromatik** (*chromatic number*) dari G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga jika titik-titik di G diwarnai dengan k warna, maka setiap dua titik yang bertetangga tidak akan mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Bilangan kromatik lokasi (*locating chromatic number*) dari graf G , dinotasikan dengan $\chi_L(G)$, adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga terdapat pewarnaan lokasi dengan kardinalitas k untuk graf G . Karena setiap pewarnaan lokasi merupakan suatu pewarnaan, maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$ untuk setiap graf terhubung G . Chartrand, dkk. [5] menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa graf seperti lintasan, siklus, graf multipartit lengkap dan graf bintang ganda.

Berikut adalah lema pendukung yang diperlukan dalam pembuktian kembali hasil kajian makalah ini.

Lema 2.1. [2] *Misalkan G adalah graf terhubung nontrivial. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi untuk G dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka u dan v harus berbeda warna.*

Bukti. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung *nontrivial* G dan misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna S_i untuk suatu titik $u, v \in V(G)$. Akan dibuktikan dengan menggunakan kontradiksi. Misalkan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misalnya S_i dari $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$. Akibatnya $d(u, S_i) = d(v, S_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $d(u, S_j) = d(v, S_j)$ untuk $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi, $c(u) \neq c(v)$. $\square$

3. Pembahasan

Graf $C_n \odot \overline{K}_m$ adalah graf yang diperoleh dari graf siklus C_n dengan n titik dan sebanyak n buah duplikat dari komplemen graf lengkap $\overline{K}_m$ dengan m titik, dengan cara menghubungkan setiap titik di duplikat $\overline{K}_m$ ke- i ke titik x_i di graf C_n , untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Dalam bab ini akan dikaji kembali mengenai bilangan kromatik lokasi untuk graf $C_n \odot \overline{K}_m$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 1$. Perhatikan graf $C_n \odot \overline{K}_m$ pada Gambar 1.

Teorema 3.1. [2] *Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$, bilangan kromatik lokasi dari $C_n \odot \overline{K}_m$*

Gambar 1. Graf $C_n \odot \overline{K}_m, n \geq 3, m \geq 1$

adalah sebagai berikut.

$$\chi_L(C_n \odot \overline{K}_1) = \begin{cases} 3, & \text{jika } 3 \leq n \leq 5, \\ 4, & \text{jika } n \geq 6, \end{cases}$$

$$\chi_L(C_n \odot \overline{K}_m) = \begin{cases} m+1, & \text{jika } m \geq 2, 3 \leq n \leq m+1, \\ m+2, & \text{jika } m \geq 2, n \geq m+2. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $V(C_n \odot \overline{K}_m) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup V(H_1) \cup V(H_2) \cup \dots \cup V(H_n)$, dimana $V(H_i) = \{a_{ij} | 1 \leq j \leq m\}$ adalah himpunan titik dari duplikat ke- i di K_m . Dari Lema 2.1, setiap dua titik di $V(H_i)$ harus berada dalam kelas warna yang berbeda. Karena x_i bertetangga dengan semua titik di H_i , maka x_i harus berada dalam kelas warna yang berbeda dari titik di $V(H_i)$. Sehingga, $\chi_L(C_n \odot \overline{K}_m) \geq m+1$. Pandang dua kasus berikut.

Kasus 1. $m = 1$.

Untuk $3 \leq n \leq 5$, jelas bahwa $\chi_L(C_n \odot \overline{K}_1) \geq 3$.

Untuk $C_3 \odot \overline{K}_1$, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(C_3 \odot \overline{K}_1) = 3$, seperti pada Gambar 2.

Misal dikonstruksikan kelas warna sebagai berikut.

- $S_1 = \{x_1, a_2, a_3\}$,
- $S_2 = \{x_2, a_1\}$,
- $S_3 = \{x_3\}$.

Untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(C_3 \odot \overline{K}_1) = 3$, cukup dengan menunjukkan bahwa pewarnaan titik yang diberikan berikut memenuhi pewarnaan lokasi. Kode warna yang diperoleh adalah :

- $c_\Pi(x_1) = (d(x_1, S_1), d(x_1, S_2), d(x_1, S_3)) = (0, 1, 1)$,

Gambar 2. Graf $C_3 \odot \overline{K}_1$

- $c_{\Pi}(x_2) = (d(x_2, S_1), d(x_2, S_2), d(x_2, S_3)) = (1, 0, 1)$,
- $c_{\Pi}(x_3) = (d(x_3, S_1), d(x_3, S_2), d(x_3, S_3)) = (1, 1, 0)$,
- $c_{\Pi}(a_1) = (d(a_1, S_1), d(a_1, S_2), d(a_1, S_3)) = (1, 0, 2)$,
- $c_{\Pi}(a_2) = (d(a_2, S_1), d(a_2, S_2), d(a_2, S_3)) = (0, 1, 2)$,
- $c_{\Pi}(a_3) = (d(a_3, S_1), d(a_3, S_2), d(a_3, S_3)) = (0, 2, 1)$.

Karena setiap titik pada $C_3 \odot \overline{K}_1$ memiliki kode warna yang berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi pada graf $C_3 \odot \overline{K}_1$. Sehingga, bilangan kromatik lokasi $\chi_L(C_3 \odot \overline{K}_1) = 3$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $C_4 \odot \overline{K}_1$, berlaku $\chi_L(C_4 \odot \overline{K}_1) = 3$, seperti pada Gambar 3.

Gambar 3. Graf $C_4 \odot \overline{K}_1$

Misal dikonstruksikan kelas warna sebagai berikut.

- $S_1 = \{x_1, x_3, a_2\}$,
- $S_2 = \{x_2, x_4, a_3\}$,
- $S_3 = \{a_1, a_4\}$.

Kode warna yang diperoleh adalah :

- $c_\Pi(x_1) = (d(x_1, S_1), d(x_1, S_2), d(x_1, S_3)) = (0, 1, 1)$,
- $c_\Pi(x_2) = (d(x_2, S_1), d(x_2, S_2), d(x_2, S_3)) = (1, 0, 2)$,
- $c_\Pi(x_3) = (d(x_3, S_1), d(x_3, S_2), d(x_3, S_3)) = (0, 1, 2)$,
- $c_\Pi(x_4) = (d(x_4, S_1), d(x_4, S_2), d(x_4, S_3)) = (1, 0, 1)$,
- $c_\Pi(a_1) = (d(a_1, S_1), d(a_1, S_2), d(a_1, S_3)) = (1, 2, 0)$,
- $c_\Pi(a_2) = (d(a_2, S_1), d(a_2, S_2), d(a_2, S_3)) = (0, 1, 3)$,
- $c_\Pi(a_3) = (d(a_3, S_1), d(a_3, S_2), d(a_3, S_3)) = (1, 0, 3)$,
- $c_\Pi(a_4) = (d(a_4, S_1), d(a_4, S_2), d(a_4, S_3)) = (2, 1, 0)$.

Karena setiap titik pada $C_4 \odot \overline{K}_1$ memiliki kode warna yang berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi pada graf $C_4 \odot \overline{K}_1$. Sehingga, bilangan kromatik lokasi $\chi_L(C_4 \odot \overline{K}_1) = 3$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $C_5 \odot \overline{K}_1$, berlaku $\chi_L(C_5 \odot \overline{K}_1) = 3$, seperti pada Gambar 4.

Gambar 4. Graf $C_5 \odot \overline{K}_1$

Misal dikonstruksikan kelas warna sebagai berikut.

- $S_1 = \{x_1, x_3, a_2, a_5\}$,
- $S_2 = \{x_2, x_4, a_3\}$,
- $S_3 = \{x_5, a_1, a_4\}$.

Kode warna yang diperoleh adalah:

- $c_\Pi(x_1) = (d(x_1, S_1), d(x_1, S_2), d(x_1, S_3)) = (0, 1, 1)$,

- $c_{\Pi}(x_2) = (d(x_2, S_1), d(x_2, S_2), d(x_2, S_3)) = (1, 0, 2),$
- $c_{\Pi}(x_3) = (d(x_3, S_1), d(x_3, S_2), d(x_3, S_3)) = (0, 1, 2),$
- $c_{\Pi}(x_4) = (d(x_4, S_1), d(x_4, S_2), d(x_4, S_3)) = (1, 0, 1),$
- $c_{\Pi}(x_5) = (d(x_5, S_1), d(x_5, S_2), d(x_5, S_3)) = (1, 1, 0),$
- $c_{\Pi}(a_1) = (d(a_1, S_1), d(a_1, S_2), d(a_1, S_3)) = (1, 2, 0),$
- $c_{\Pi}(a_2) = (d(a_2, S_1), d(a_2, S_2), d(a_2, S_3)) = (0, 1, 3),$
- $c_{\Pi}(a_3) = (d(a_3, S_1), d(a_3, S_2), d(a_3, S_3)) = (1, 0, 3),$
- $c_{\Pi}(a_4) = (d(a_4, S_1), d(a_4, S_2), d(a_4, S_3)) = (2, 1, 0),$
- $c_{\Pi}(a_5) = (d(a_5, S_1), d(a_5, S_2), d(a_5, S_3)) = (0, 2, 1).$

Karena setiap titik pada $C_5 \odot \overline{K}_1$ memiliki kode warna yang berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi pada graf $C_5 \odot \overline{K}_1$. Sehingga, bilangan kromatik lokasi $\chi_L(C_5 \odot \overline{K}_1) = 3$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\chi_L(C_n \odot \overline{K}_1) = 4$ untuk $n \geq 6$. Definisikan $c : V(C_n \odot \overline{K}_1) \rightarrow [1, 4]$ sebagai berikut.

$$\bullet c(x_i) = \begin{cases} 4, & \text{jika } i = 1; \\ 3, & \text{jika } (n \text{ dan } i \text{ ganjil}, i \neq 1) \text{ atau} \\ & (n \text{ genap}, i \text{ ganjil}, 1 < i \leq 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1); \\ 2, & \text{jika } (n \text{ ganjil dan } i \text{ genap}) \text{ atau} \\ & (n \text{ genap}, i \text{ ganjil dan } i > 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1) \text{ atau} \\ & (n \text{ genap}, i \text{ genap dan } i \leq \frac{n}{2}); \\ 1, & \text{jika } n \text{ dan } i \text{ genap dan } i \geq \frac{n}{2} + 1. \end{cases}$$

$$\bullet c(a_{i1}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } (n \text{ ganjil dan semua } i) \text{ atau} \\ & (n \text{ genap}, i \leq 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1); \\ 3, & \text{jika } n \text{ genap dan } i > 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1. \end{cases}$$

Pemetaan c adalah pewarnaan lokasi pada $C_n \odot \overline{K}_1$, untuk $n \geq 6$, karena apabila $d(u, x_1) = d(v, x_1)$ maka berlaku salah satu dari empat kemungkinan berikut.

- (1) $u = a_{i1}, v = x_{i+1},$
- (2) $u = x_i, v = x_{n+1-i},$
- (3) $u = a_{i1}, v = x_{n+1-i},$
- (4) $u = x_i, v = a_{(n+1-i)1}.$

Jika salah satu (1) atau (2) berlaku maka titik u dan v berada di kelas warna yang berbeda. Jika (3) berlaku maka $1 = d(v, S_2) < d(u, S_2) = 2$ atau u dan v berada di kelas warna yang berbeda. Jika (4) berlaku maka $1 = d(u, S_2) < d(v, S_2) = 2$ atau u dan v berada di kelas warna yang berbeda. Oleh karena itu, dalam semua kasus diatas kode warna di u dan v adalah berbeda. Sehingga, c adalah pewarnaan lokasi. Jadi diperoleh bahwa $\chi_L(G) \leq 4$.

Kasus 2. $m > 1$.

Untuk $3 \leq n \leq m+1$, definisikan $c_1 : V(C_n \odot \overline{K}_m) \rightarrow [1, m+1]$.

- $c_1(x_i) = i,$
- $c_1(V(H_i)) = [1, m+1] - \{i\}$ untuk setiap $i,$

dimana $c_1(V(H_i)) = \{(c_1(a_{i1}), c_1(a_{i2}), \dots, c_1(a_{im}))\}$. Jelas bahwa c_1 adalah pewarnaan lokasi pada $C_n \odot \overline{K}_m$.

Untuk menunjukkan batas atas, definisikan $c_2 : V(C_n \odot \overline{K}_m) \rightarrow [1, m+2]$ sebagai berikut.

- $c_2(x_1) = m+2$, sementara untuk duplikat K_m ke-1, definisikan $c_2(K_{m_1}) = [1, m]$
- $c_2(x_i) = c(x_i)$, dimana $c(x_i)$ adalah pewarnaan lokasi di Kasus 1. Sementara untuk duplikat K_m ke- i , definisikan $c_2(V(K_{m_i})) = [1, m+1] - \{c_2(x_i)\}$.

Dapat dilihat bahwa c_2 adalah pewarnaan lokasi pada $(C_n \odot \overline{K}_m)$ untuk $n \geq m+2$ dan $m \geq 2$. $\square$

4. Kesimpulan

Pada makalah ini, penulis mengkaji kembali makalah [2] mengenai bilangan kromatik lokasi untuk graf $C_n \odot \overline{K}_m$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 1$, dimana diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi dari graf $C_n \odot \overline{K}_m$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 1$ adalah sebagai berikut.

$$\chi_L(C_n \odot \overline{K}_1) = \begin{cases} 3, & \text{jika } 3 \leq n \leq 5, \\ 4, & \text{jika } n \geq 6, \end{cases}$$

$$\chi_L(C_n \odot \overline{K}_m) = \begin{cases} m+1, & \text{jika } m \geq 2, 3 \leq n \leq m+1, \\ m+2, & \text{jika } m \geq 2, n \geq m+2. \end{cases}$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Dr. Mahdhivan Syafwan, Bapak Drs. Syafruddin dan Bapak Zulakmal, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

- [1] Asmiati, H. Assiyatun and E. T. Baskoro. 2011. Locating-chromatic number of amalgamation of stars. *ITB J. Sci.* **1**: 1 – 8
- [2] Baskoro, E.T, and Purwasih, I.A, (2012). The locating-chromatic number for corona product of graphs. *Southeast-Asian J. of Sciences* **1** (1): 124 – 134
- [3] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London.
- [4] Chartrand, G.,dkk. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull Inst Combin. Appl* **36**: 89 – 101
- [5] Chartrand, G.,dkk. 2003. Graphs of order n with locating-chromatic number $n-1$. *Discrete Math* **269** (1 – 3): 65 – 79.