

BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF $K_n \odot \overline{K}_m$

RINA WALYNI, ZULAKMAL

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 Rinawalyni@gmail.com*

Abstract. Bilangan Kromatik Lokasi dari G adalah minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G . Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan dari G . Untuk $1 \leq i \leq k$, kita definisikan S_i merupakan himpunan semua titik-titik yang diberi warna i . Kode warna $c_\Pi(v)$ dari $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai vektor- k $c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$ dimana $d(v, S_i)$ adalah jarak antara v dan S_i . Misalkan G dan H adalah dua buah graf dengan $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $V(H) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Salinan adalah graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi yang sama dari graf G . Hasil kali korona pada graf G terhadap graf H yang dinotasikan dengan $G \odot H$ didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan graf G dengan $|V(G)| = n$ dan n salinan $H_1, H_2, \dots, H_n$ dari graf H , kemudian menghubungkan titik ke- i dari G ke setiap titik di H_i , untuk $1 \leq i \leq n$. Pada tulisan ini, akan dibahas kembali makalah [2] tentang bilangan kromatik lokasi untuk graf $K_n \odot \overline{K}_m$.

Kata Kunci: Bilangan Kromatik Lokasi, graf lengkap, operasi korona

1. Pendahuluan

Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G dengan menggunakan warna-warna $1, 2, \dots, k$ untuk suatu bilangan bulat positif k . Jika titik u dan v bertetangga di G , maka $c(u) \neq c(v)$. Secara ekuivalen, c merupakan suatu partisi Π dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang saling bebas $S_1, S_2, \dots, S_k$, dimana S_i merupakan himpunan semua titik-titik yang diberi warna i , $1 \leq i \leq k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ berdasarkan suatu pewarnaan titik, maka representasi v terhadap Π disebut **kode warna** (*color code*). Kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik v dalam G didefinisikan sebagai vektor- k :

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berada di G memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π , maka c disebut **pewarnaan lokasi** (*locating coloring*) dari G .

Kajian tentang pewarnaan lokasi adalah suatu kajian yang cukup baru dalam bidang teori graf. Konsep pewarnaan lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. [6] pada tahun 2002 dengan menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf.

Lema berikut digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini.

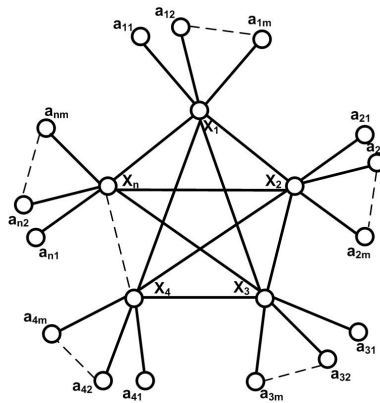
Lema 1.1. [6] Misalkan G suatu graf terhubung. Misal c adalah suatu pewarnaan lokasi untuk graf G dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - (u, v)$ sedemikian sehingga u dan v adalah dua titik dengan warna berbeda.

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi dari titik-titik S ke dalam kelas warna S_i . Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, namakan S_i dari Π .

Akibatnya $d(u, S_i) = d(v, S_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $d(u, S_j) = d(v, S_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Ini kontradiksi dengan pemisalan bahwa $c(u) = c(v)$. Dengan demikian, haruslah diperoleh $c(u) \neq c(v)$ yaitu u dan v merupakan suatu pewarnaan yang berbeda. $\square$

2. Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf $K_n \odot \overline{K}_m$

Misalkan terdapat graf lengkap K_n dengan himpunan titik $V(K_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Misalkan terdapat graf komplemen dari graf lengkap dengan m titik K_m , yang dinotasikan dengan $\overline{K}_m$ dengan himpunan titik $V(\overline{K}_m) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Graf $K_n \odot \overline{K}_m$ adalah graf yang diperoleh dari K_n dan komplemen graf lengkap $\overline{K}_m$ dengan m titik, dengan cara menghubungkan setiap m titik di salinan ke- i dari $\overline{K}_m$ ke titik x_i di K_n , untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Dalam bab ini akan dibahas kembali makalah [2] mengenai bilangan kromatik lokasi untuk graf $K_n \odot \overline{K}_m$ dengan $n \geq 1, m \geq 1$.



Gambar 1. Graf $K_n \odot \overline{K}_m, n, m \geq 1$

Tuliskan $V(\overline{K}_{im}) = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}\}$, dimana $\overline{K}_{im}$ adalah duplikat ke- i dari

graf $\overline{K}_{im}$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Maka

$$V(K_n \odot \overline{K}_m) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \bigcup_{i=1}^n V(\overline{K}_{im}),$$

$$E(K_n \odot \overline{K}_m) = E(K_n) \cup \bigcup_{i=1}^n E(\overline{K}_{im}) \cup \{x_i a_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

Dapat dilihat bahwa:

$$|V(K_n \odot \overline{K}_m)| = |V(K_n)| + |V(K_n)| \cdot |V(\overline{K}_m)|,$$

$$|E(K_n \odot \overline{K}_m)| = |E(K_n)| + |V(K_n)| \cdot |E(\overline{K}_m)| + |V(K_n)| \cdot |V(\overline{K}_m)|.$$

Dalam makalah [2] diperoleh bilangan kromatik lokasi dari graf dari graf $K_n \odot \overline{K}_m$ untuk $n, m \geq 1$, seperti yang dilihat pada Teorema 2.1 berikut:

Teorema 2.1. [2] Untuk $n, m \geq 1$, bilangan kromatik lokasi dari $K_n \odot \overline{K}_m$ adalah sebagai berikut:

$$\chi_L(K_n \odot \overline{K}_m) = \begin{cases} m+1, & \text{jika } n \leq m+1; \\ n, & \text{jika } n > m+1. \end{cases}$$

Bukti. Kasus 1. Perhatikan Graf $K_n \odot \overline{K}_m$ untuk $n, m \geq 1$, dan $n \leq m+1$.

Untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(K_n \odot \overline{K}_m) = m+1$ cukup dengan menunjukkan bahwa graf yang diberikan memenuhi pewarnaan lokasi tersebut. Pandang pewarnaan c untuk titik x_i yang berdekatan dengan setiap titik pada K_{im} , maka x_i mempunyai pewarnaan yang berbeda selain warna pada $V(K_{im})$. Berdasarkan aturan pewarnaan lokasi pada graf yaitu, setiap dua titik yang bertetangga tidak boleh memiliki kode warna yang sama. Misalkan $x_i \in K_n$ maka pada $V(K_n \odot \overline{K}_m) = x_i$ bertetangga dengan semua titik di $\overline{K}_m$. Maka x_i haruslah memiliki kode warna yang berbeda dari semua titik di $V(K_{im})$ maka $\chi_L(K_n \odot \overline{K}_m) \geq m+1$.

Definisikan suatu pemetaan c pada $V(K_n \odot \overline{K}_m)$ sedemikian sehingga $c(x_i) = i$ dan $c(V(K_{im})) = [1, m+1] - \{i\}$ untuk setiap $i \leq m+1$. Pemetaan c ini adalah pewarnaan lokasi. Dari Pemetaan c tersebut maka semua titik pada $V(K_{im})$ memiliki kode warna yang berbeda satu sama lain dengan $|V(K_{im})| = m$ sehingga banyaknya kode warna pada $V(K_{im})$ adalah m .

Pada $(K_n \odot \overline{K}_m)$, x_i memiliki kode warna yang berbeda dengan semua titik pada $V(K_{im})$ sehingga banyaknya kode warna pada graf $(K_n \odot \overline{K}_m)$ adalah $m+1$. Pewarnaan dengan $m+1$ warna pada graf $(K_n \odot \overline{K}_m)$ merupakan suatu pewarnaan lokasi karena setiap titik pada graf $(K_n \odot \overline{K}_m)$ memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π .

Kasus 2. Perhatikan Graf $K_n \odot \overline{K}_m$ untuk $n, m \geq 1$, dan $n > m+1$.

Untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(K_n \odot \overline{K}_m) = n$ cukup dengan menunjukkan bahwa graf yang diberikan memenuhi pewarnaan lokasi tersebut. Pandang pewarnaan c untuk x_i yang berdekatan dengan setiap titik K_{im} , maka x_i mempunyai warna yang berbeda dengan titik-titik di $V(K_{im})$.

Pandang $n > m+1$. Karena setiap dua buah x_i berada di kelas warna yang berbeda, maka:

$$\chi_L(K_n \odot \overline{K}_m) \geq n.$$

Didefinisikan pemetaan c dengan mengkonstruksikan pewarnaan titik $c(x_i) = i$, $c(V(K_{im})) = [1, m+1] - \{i\}$ untuk $i \leq m$ dan $c(V(K_{im})) = [1, m]$ untuk i yang lainnya. Jika $d(u, x_1) = d(v, x_1)$, maka berlaku tiga kasus berikut ini:

Kasus 2.1 Untuk $u, v \in V(K_n)$.

Pandang $u = x_k$ dan $v = x_l$ untuk suatu k, l dan u, v mempunyai warna yang berbeda. Jika $x_k \in V(K_n)$ dan $x_l \in V(K_n)$ pada graf $K_n \odot \overline{K}_m$. Akibatnya $d(x_k, x_1) = d(x_l, x_1) = 1$ karena $d(u, x_1) = d(v, x_1)$ maka u dan v berada dalam kelas warna yang berbeda.

Kasus 2.2 Untuk $u \in V(K_n)$ dan $v \in V(\overline{K}_m)$

Pandang pewarnaan titik untuk $u = x_i$ dan $v = a_{1k}$ untuk suatu $i \neq 1$ dan $i \neq k$. Jika $x_i \in V(K_n)$ dan $a_{1k} \in V(\overline{K}_m)$ pada graf $K_n \odot \overline{K}_m$. Akibatnya $d(x_i, x_1) = d(x_{1k}, x_1) = 1$ karena $d(u, x_1) = d(v, x_1)$ maka u dan v berada dalam kelas warna yang berbeda.

Kasus 2.3 Untuk $u \in V(K_{im})$ dan $v \in V(K_{jm})$, $i \neq j$

Pada kasus ini, pewarnaan titik untuk $u = a_{it}$ dan $v = a_{js}$ untuk suatu i, j, t, s . Jika $a_{it} \in V(K_{im})$ dan $a_{js} \in V(K_{jm})$ pada graf $K_n \odot \overline{K}_m$. Akibatnya $d(a_{it}, x_1) = d(a_{js}, x_1) = 2$ karena $d(u, x_1) = d(v, x_1)$ maka u dan v berada dalam kelas warna yang berbeda.

Dari ketiga kasus diatas dapat disimpulkan bahwa c adalah suatu lokasi pewarnaan dan $\chi_L(K_n \odot \overline{K}_m) = n$ untuk $n, m \geq 1$. $\square$

Sebagai contoh akan ditentukan bilangan kromatik lokasi untuk graf $K_5 \odot \overline{K}_4$ sebagai berikut. Misalkan $V(K_5) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dan $V(K_{i4}) = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}\}$ maka pada graf hasil korona, himpunan titik dan himpunan sisinya adalah:

$$V(K_5 \odot \overline{K}_4) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \cup V(K_{14}) \cup V(K_{24}) \cup V(K_{34}) \cup V(K_{44}).$$

dimana $V(K_{im}) = \{a_{ij} | 1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 4\}$ adalah himpunan titik dari salinan ke- i dari graf $\overline{K}_4$.

Berdasarkan Teorema 2.1, maka bilangan kromatik lokasi dari graf $V(K_5 \odot \overline{K}_4)$ adalah $4 + 1 = 5$. Berikut adalah pewarnaannya, dengan mengkonstruksikan pewarnaan titik terhadap $V(K_5 \odot \overline{K}_4)$ dengan

$$\begin{aligned} c(x_i) &= i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ c(V(K_{im})) &= [1, 5] - \{i\}, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

Dengan pewarnaan tersebut, diperoleh bahwa $\chi_L(K_5 \odot \overline{K}_4) = 5$ yaitu dengan membagi himpunan titik $K_5 \odot \overline{K}_4$ menjadi lima kelas warna sebagai berikut:

- $S_1 = \{x_1, a_{21}, a_{31}, a_{41}, a_{51}\},$
- $S_2 = \{x_2, a_{11}, a_{32}, a_{42}, a_{52}\},$
- $S_3 = \{x_3, a_{12}, a_{22}, a_{43}, a_{53}\},$
- $S_4 = \{x_4, a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{54}\},$
- $S_5 = \{x_5, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}\}.$

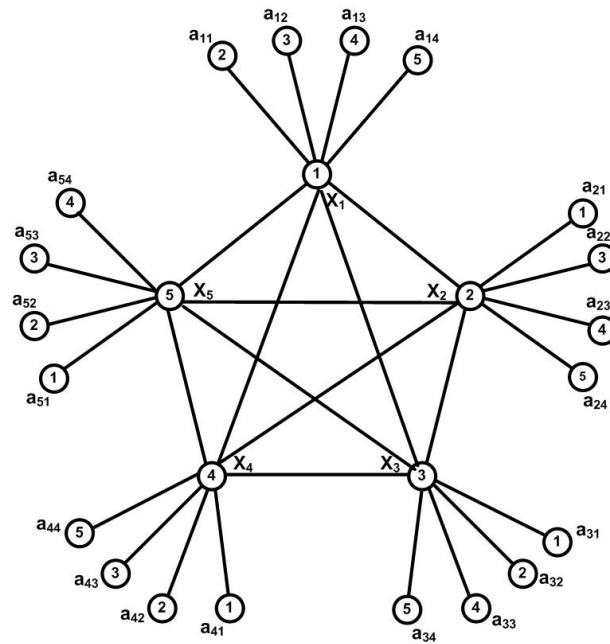
Dengan partisi tersebut, dapat dilihat bahwa kode warna untuk setiap titik di

$K_5 \odot \overline{K}_4$ berbeda, sebagai contoh:

$$c_{\Pi}(x_1) = (d(x_1, S_1), d(x_1, S_2), d(x_1, S_3), d(x_1, S_4), d(x_1, S_5)) = (0, 1, 1, 1, 1), \text{ dan}$$

$$c_{\Pi}(a_{24}) = (d(a_{24}, S_1), d(a_{24}, S_2), d(a_{24}, S_3), d(a_{24}, S_4), d(a_{24}, S_5)) = (2, 1, 2, 2, 0)$$

Pada Gambar 2 diberikan pewarnaan lokasi terhadap $K_5 \odot \overline{K}_4$ sesuai konstruksi di atas.



Gambar 2. $\chi_L(K_5 \odot \overline{K}_4) = 5$

3. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah dikaji kembali makalah [2] bahwa untuk $K_n \odot \overline{K}_m$ untuk $n, m \geq 1$, diperoleh:

$$\chi_L(K_n \odot \overline{K}_m) = \begin{cases} m + 1, & \text{jika } n \leq m + 1; \\ n, & \text{jika } n > m + 1. \end{cases}$$

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Narwen, M.Si, Bapak Dr. Admi Nazra dan Bapak Syafruddin, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

- [1] Asmiati, H. Assiyatun and E. T. Baskoro. The Locating-Chromatic Number for Corona Product of Graph, ITB. *Journal of Science* **1**: 1 – 8

- [2] E. T. Baskoro dan Ira A. Purwasih. 2012. The Locating-Chromatic Number For Corona Product Of Graphs. *Southeast Asian Journal of Sciences* **1**(1): 124 – 134
- [3] F. Buckley dan M. Lewinder. 2003. A Friendly Introduction to Graph Theory. Prentice Hall, New Jersey
- [4] J. A. Bondy dan U.S.R Murty. 1976. Graph Theory with Applications. London
- [5] G. Chartrand dan O.R. Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. McGraw-Hill, Inc. Unites States
- [6] G. Chartrand, D. Erwin, M.A. Henning, P.J. Slater, P. Zhang. The Locating-Chromatic Number of a Graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36** (2002): 89 – 101
- [7] G. Chartrand, D. Erwin, M.A. Henning, P.J. Slater, P. Zhang, Graph of Order n With Locating-Chromatic Number $n-1$, *Discrete Math* **269** (2003) (1 – 3): 65 – 79
- [8] G. Chartrand and P. Zhang, The Theory and Application of Resolvability in Graph, *Congressus Numerantium* **160** (2003), 47 – 68