Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **1** Hal. 108 – 114
ISSN : 2303–291X

KETEROBSERVASIAN SISTEM LINIER DISKRIT

MIDIAN MANURUNG
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
demikara@ymail.com

Abstract. Given the following discrete time-invariant linear control systems:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t),\\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

where $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ is an input vector, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ is defined as an output, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, and $t \in \mathbb{Z}_+$ is defined as time. Linear system is said to be observable on the finite time interval $[t_0, t_f]$ if any initial state $\mathbf{x}_0$ is uniquely determined by the output $\mathbf{y}(t)$ over the same time interval. In order to examine the observability of the system, we will use a criteria, that is by determining the observability Gramian matrix of the system is nonsingular and rank of the observability matrix for the system is n.

Kata Kunci: Discrete linear control system, Gramian matrix, observability matrix

1. Pendahuluan

Diberikan suatu sistem kontrol linier diskrit yang tidak bergantung waktu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t),\\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t),\end{aligned} \tag{1.1}$$

dimana $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ yang menyatakan vektor keadaan (*state*), $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ merupakan vektor input (kontrol), $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ menyatakan output, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, dan $t \in \mathbb{Z}_+$ (himpunan bilangan bulat nonnegatif). Sistem (1.1) dikatakan terobservasi pada $[t_0, t_f]$ jika keadaan awal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ dapat ditentukan secara tunggal dengan mengetahui output $\mathbf{y}(t)$ pada $[t_0, t_f]$ [2]. Hal yang menarik untuk dikaji dalam sistem kontrol linier adalah isu tentang bagaimana menentukan keterobservasian dari suatu sistem.

Untuk menentukan suatu sistem terobservasi atau tidak, dapat ditentukan dengan menggunakan beberapa kriteria. Kriteria yang dapat digunakan diantaranya dengan menunjukkan matriks Gramian keterobservasian dari sistem 1.1 adalah non singular, dan rank dari matriks keterobservasian dari sistem 1.1 adalah n seperti yang telah dikaji oleh Hendricks, Jannerup, dan Sorensen [3].

2. Keterobservasian Sistem Linier Diskrit

Definisi 2.1. [3] *Sistem (1.1) dikatakan terobservasi pada interval* $[t_0, t_f]$ *jika keadaan awal* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *dapat ditentukan secara tunggal dengan mengetahui output* $\mathbf{y}(t)$ *pada* $[t_0, t_f]$.

Teorema 2.2. [3] *Sistem (1.1) adalah terobservasi jika dan hanya jika matriks* $n \times n$*:*

$$\boldsymbol{W}_O(t_f) = \sum_{t=0}^{t_f-1} \phi^T(t) C^T C \phi(t),$$

adalah non singular.

Bukti. ($\Leftarrow$) Misalkan $\mathbf{W}_O(t_f)$ adalah non singular. Akan ditunjukkan bahwa sistem (1.1) adalah terobservasi. Solusi dari persamaan output (1.1) adalah

$$\mathbf{y}(t) = C\phi(t)\mathbf{x}_0. \tag{2.1}$$

Dengan mengalikan kedua ruas (2.1) dengan $\phi^T(t)C^T$, diperoleh

$$\phi^T(t)C^T\mathbf{y}(t) = \phi^T(t)C^T C\phi(t)\mathbf{x}_0. \tag{2.2}$$

Dengan menjabarkan persamaan (2.2) secara rekursif, diperoleh

$$\begin{aligned}
\phi^T(0)C^T\mathbf{y}(0) &= \phi^T(0)C^T C\phi(0)\mathbf{x}_0 \\
\phi^T(1)C^T\mathbf{y}(1) &= \phi^T(1)C^T C\phi(1)\mathbf{x}_0 \\
\phi^T(2)C^T\mathbf{y}(2) &= \phi^T(2)C^T C\phi(2)\mathbf{x}_0 \\
&\vdots \\
\phi^T(t_f-1)C^T\mathbf{y}(t_f-1) &= \phi^T(t_f-1)C^T C\phi(t_f-1)\mathbf{x}_0.
\end{aligned}$$

Dengan menjumlahkan semua persamaan diatas, diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{t_f-1} \phi^T(t)C^T\mathbf{y}(t) &= \sum_{t=0}^{t_f-1} \phi^T(t)C^T C\phi(t)\mathbf{x}_0 \\
&= \mathbf{W}_O(t_f)\mathbf{x}_0. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Karena $\mathbf{W}_O(t_f)$ adalah non singular, maka $\mathbf{x}_0$ dapat ditentukan secara tunggal, sehingga (1.1) adalah terobservasi.

($\Rightarrow$) Misalkan $\mathbf{W}_O(t_f)$ adalah singular, maka terdapat vektor $\mathbf{x}_a \neq \mathbf{0}$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{W}_O(t_f)\mathbf{x}_a = \mathbf{0}, \tag{2.4}$$

dan oleh karena itu

$$\mathbf{x}_a^T\mathbf{W}_O(t_f)\mathbf{x}_a = 0. \tag{2.5}$$

Tetapi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_a^T \mathbf{W}_O(t_f)\mathbf{x}_a &= \mathbf{x}_a^T \sum_{t=0}^{t_f-1} \phi^T(t) C^T C \phi(t) \mathbf{x}_a \\ &= \sum_{t=0}^{t_f-1} \mathbf{x}_a^T \phi^T(t) C^T C \phi(t) \mathbf{x}_a \\ &= \sum_{t=0}^{t_f-1} \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) \\ &= \sum_{t=0}^{t_f-1} \|\mathbf{z}(t)\|^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

dimana

$$\mathbf{z}(t) = C\phi(t)\mathbf{x}_a.$$

Dari (2.5) disimpulkan bahwa

$$\mathbf{z}(t) = C\phi(t)\mathbf{x}_a = \mathbf{0},\ t = 0, 1, 2, \cdots, t_f - 1. \tag{2.7}$$

Perhatikan bahwa (2.7) merupakan output dari sistem (1.1) pada $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_a$, dan karena $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$ untuk $t = 0, 1, 2, \cdots, t_f - 1$, maka $\mathbf{x}(t_0)$ tidak dapat ditentukan secara tunggal dari $\mathbf{y}(t)$. Dengan demikian sistem (1.1) tidak terobservasi. □

Teorema 2.3. [3] *Sistem LTI (1.1) adalah terobservasi jika dan hanya jika rank dari matriks keterobservasian, yaitu*

$$\boldsymbol{M}_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

adalah n *(full rank).*

Bukti. ($\Leftarrow$) Jika $\mathbf{W}_O(t_f)$ adalah singular maka (2.7) berlaku. Dalam pembuktian ke arah kanan dari Teorema 2.2 telah diperoleh bahwa

$$\mathbf{z}(t) = CA^t\mathbf{x}_a = \mathbf{0},\ t = 0, 1, 2, \cdots, t_f - 1 \tag{2.9}$$

jika $t_f = n$, maka

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(0) &= CA^0\mathbf{x}_a = C\mathbf{x}_a = \mathbf{0} \\ \mathbf{z}(1) &= CA^1\mathbf{x}_a = CA\mathbf{x}_a = \mathbf{0} \\ \mathbf{z}(2) &= CA^2\mathbf{x}_a = \mathbf{0} \\ &\vdots \\ \mathbf{z}(n-1) &= CA^{n-1}\mathbf{x}_a = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dalam notasi lain (2.9) dapat ditulis

$$\mathbf{M}_O\mathbf{x}_a = \mathbf{0}, \tag{2.11}$$

dimana $\mathbf{x}_a$ adalah vektor $n \times 1$ yang unsur-unsurnya bergantung waktu, yaitu

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \text{ dan} \tag{2.12}$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \; \mathbf{c}_2 \cdots \mathbf{c}_n \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

dimana $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{rn\times 1}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ merupakan kolom dari matriks $\mathbf{M}_O$. Dari (2.12) diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\mathbf{c}_i = \mathbf{0}. \tag{2.14}$$

Ekspresi (2.14) menunjukkan bahwa n kolom dari matriks keterobservasian tidak bebas linier, yang berarti bahwa rank dari matriks keterobservasian kurang dari n.

($\Rightarrow$) Jika rank($\mathbf{M}_O$) $\neq n$, maka dengan memandang persamaan (2.8), yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0(t_f) &= \sum_{t=0}^{t_f-1} (A^T)^t C^T C A^t \\ &= C^T C + A^T C^T C A + (A^T)^2 C^T C A^2 + \cdots + (A^T)^{n-1} C^T C A^{n-1} \\ &= \begin{bmatrix} C^T \; A^T C \; \cdots \; (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{M}_O^T \mathbf{M}_O, \end{aligned} \tag{2.15}$$

Persamaan (ref216) menunjukkan bahwa $rank(\mathbf{M}_O^T\mathbf{M}_O)$ tidak mungkin lebih besar dari $rank(\mathbf{M}_O)$. Dengan kata lain, jika $rank(\mathbf{M}_O) < n$ maka Gramian adalah singular. □

3. Contoh

Diberikan suatu sistem sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}.$$

Akan diperiksa apakah sistem ini terobservasi atau tidak dalam $[0, 2]$. Jika ya, tentukan keadaan awal $\mathbf{x}(0)$. Karena

$$rank\,(\mathbf{M}_O) \;=\; rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \;=\; 4,$$

maka sistem adalah terobservasi. Berikutnya akan ditentukan $\mathbf{x}(0)$.

Matriks transisi dari sistem di atas adalah

$$\phi(t) = A^t = \mathcal{Z}^{-1}\{z(zI - A)^{-1}\}$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{ z \left(z \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&-3&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\}$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{ z \left(\begin{pmatrix} z&0&0&0 \\ 0&z&0&0 \\ 0&0&z&0 \\ 0&0&0&z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&-3&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\}$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{ z \begin{pmatrix} z-1&0&0&0 \\ 0&z+3&0&0 \\ 0&0&z-2&0 \\ 0&0&0&z-1 \end{pmatrix}^{-1} \right\}$$

$$= \mathcal{Z}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{z}{z-1}&0&0&0 \\ 0&\frac{z}{z+3}&0&0 \\ 0&0&\frac{z}{z-2}&0 \\ 0&0&0&\frac{z}{z-1} \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = \; A^t \;= \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&(-3)^t&0&0 \\ 0&0&(2)^t&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga matriks Gramiannya adalah

$\mathbf{W}_O(t_f) = \sum_{t=0}^{t_f-1} \phi^T(t) C^T C \phi(t)$

$$= \sum_{t=0}^{t_f-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{t=0}^{t_f-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^t \\ 3(2)^t & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{t=0}^{t_f-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & (-3)^t & 0 & 3(3)^t \\ 3(2)^t & 0 & 9(2)^t & 6(2)^t \\ 2 & 3 & 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{t=0}^{t_f-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3(2)^t & 2 \\ 0 & (-3)^{2t} & 0 & 3(-3)^t \\ 3(2)^t & 0 & 9(2)^{2t} & 6(2)^t \\ 2 & 3(-3)^t & 6(2)^t & 13 \end{pmatrix}.$$

Untuk $t_f = 2$, diperoleh

$$\mathbf{W}_O(2) = \sum_{t=0}^{2-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3(2)^t & 2 \\ 0 & (-3)^{2t} & 0 & 3(-3)^t \\ 3(2)^t & 0 & 9(2)^{2t} & 6(2)^t \\ 2 & 3(-3)^t & 6(2)^t & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & -9 \\ 6 & 0 & 36 & -9 \\ 2 & -9 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & -6 \\ 9 & 0 & 45 & -3 \\ 4 & -6 & 18 & 26 \end{pmatrix}.$$

Karena det $(\mathbf{W}_O(t_f)) = 1296 \neq 0$, maka matriks Gramiannya adalah nonsingular. Dengan memandang persamaan (2.4), diperoleh

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{pmatrix} = \mathbf{W}_O^{-1} \sum_{t=0}^{1} \phi^T(t) C^T \mathbf{y}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 8,19 & -0,96 & -1 & -1,59 \\ -0,08 & 0,12 & 0 & 0,04 \\ -0,17 & 0,19 & 0,22 & 0,32 \\ -0,14 & 0,04 & 0 & 0,07 \end{pmatrix} \sum_{t=0}^{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 8,19 & -0,96 & -1 & -1,59 \\ -0,08 & 0,12 & 0 & 0,04 \\ -0,17 & 0,19 & 0,22 & 0,32 \\ -0,14 & 0,04 & 0 & 0,07 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) + y_1(1) \\ y_2(0) - 3y_2(1) \\ 3y_1(0) + 6y_1(1) \\ 2y_1(0) + 3y_2(0) + 2y_1(1) + 3y_2(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2,01y_1(0) - 0,99y_1(1) - 5,73y_2(0) - 1,87y_2(1) \\ 0,24y_2(0) - 0,24y_2(1) \\ 1,13y_1(0) + 1,79y_1(1) + 1,15y_2(0) + 0,39y_2(1) \\ 0,25y_2(0) + 0,09y_2(1) \end{pmatrix}.$$

Sehingga jika $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, maka

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,14 \\ -0,24 \\ 1,52 \\ 0,09 \end{pmatrix}$$

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Muhafzan, Bapak Bukti Ginting, M.Si, Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, dan Bapak Zulakmal, M. Si yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Kedelapan Jilid I. Erlangga : Jakarta.
[2] Duan, G. 2010. *Analysis and Design Descriptor Linear Systems*. Springer : New York.
[3] Hendricks, E., Jannerup, O., dan Sorensen, P.H. 2008: *Linear Systems Control*, Springer. Verlag Berlin Heidelberg.
[4] Kailath, T. 1980. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Inc., Engelwood Cliffs, NJ.
[5] Ogata, K. 1995. *Discrete-Time Control Systems*. Prentice-Hall, New Jersey.
[6] Rugh, W. J. 1996. *Linear System Theory*, 2nd ed. Prentice-Hall, New Jersey.