Jurnal Matematika UNAND
Vol. 1 No. 1 Hal. 63 – 66
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

BATAS ATAS $R(C_4, W_m)$ UNTUK $m \geq 6$

WIDYA RAHMAH SARI

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163, Indonesia
ws_1630@yahoo.com

Abstrak. Untuk dua graf, G dan H, bilangan Ramsey graf $R(G, H)$ didefi-nisikan sebagai bilangan terkecil n sedemikian sehingga setiap F dengan n titik akan memuat G atau komplemen dari F memuat H. Pada makalah ini dikaji tentang batas atas dari bilangan Ramsey graf untuk pasangan graf siklus C_4 dan graf roda W_m untuk $m \geq 6$.
***Kata kunci**: Bilangan Ramsey, siklus, roda.*

1 Pendahuluan

Teori Ramsey digunakan untuk mengkaji permasalahan penentuan prosedur dalam menyelidiki konsistensi dari sejumlah rumusan logika yang diberikan. Tema dari teori Ramsey ini adalah, seperti yang dinyatakan oleh Theodore S. Motzkin, setiap struktur yang besar, walaupun struktur tersebut tidak teratur, pasti akan memuat substruktur yang teratur untuk setiap ukuran substruktur yang diminta. Dalam teori graf, teori Ramsey dapat dinyatakan sebagai berikut.

> *Untuk setiap bilangan bulat positif a dan b terdapat bilangan bulat positif M_0 sedemikian sehingga setiap graf F dengan m titik, dengan $m \geq M_0$, senantiasa memenuhi sifat berikut : F memuat subgraf lengkap K_a merah atau komplemen dari F memuat subgraf lengkap K_b biru.*

Bilangan bulat positif terkecil M_o pada pernyataan di atas disebut bilangan Ramsey klasik untuk bilangan bulat positif a dan b, dinotasikan $R(a, b)$. Karena setiap graf F memenuhi $\overline{\overline{F}} = F$, maka bilangan Ramsey klasik bersifat simetris, yakni $R(a, b) = R(b, a)$.

Konsep bilangan Ramsey klasik kemudian diperluas dalam berbagai bentuk. Salah satu di antaranya adalah bilangan Ramsey graf, yang dapat dinyatakan sebagai berikut.

> *Diberikan dua graf G dan H. Bilangan Ramsey graf $R(G, H)$ didefi-nisikan sebagai bilangan terkecil n sedemikian sehingga setiap graf F dengan n titik akan memuat G atau komplemen dari F memuat H.*

Pada perkembangan selanjutnya studi bilangan Ramsey tidak hanya terbatas pada graf lengkap saja, tetapi juga telah diperumum untuk jenis graf sebarang lainnya, seperti graf siklus (*cycle*), graf roda (*wheel*), graf pohon (*tree*), graf bintang (*star*), graf lintasan (*path*), graf buku (*book*), pasangan pohon dan roda, pasangan bintang dan roda, pasangan siklus dan roda, dan lain-lain.

Banyak hasil menarik lainnya dari bilangan Ramsey graf yang telah diperoleh. Secara khusus, untuk pasangan graf siklus C_n dan graf roda W_m, Burr dan

Erdos menunjukkan bahwa $R(C_3, W_m) = 2m + 1$ untuk setiap $m \geq 5$. Radziszowski dan Xia memberikan metode sederhana dan terpadu untuk menentukan berapa nilai $R(C_3, P_n)$ dan $R(C_3, W_m)$. Untuk hasil yang lebih umum, Zhou menunjukkan bahwa $R(Cn, W_m) = 2m + 1$ untuk n ganjil dan $m \geq 5n - 7$.

Salah satu studi tentang bilangan Ramsey yang telah dilakukan oleh Surahmat dan E.T.Baskoro adalah untuk kombinasi graf siklus C_n dan graf roda W_m, yaitu penentuan bilangan Ramsey untuk pasangan graf $R(C_n, W_4)$ dan $R(C_n, W_5)$ [lihat tinjauan pustaka 4]. Dua tulisan dari Surahmat, dkk dan Kung-Kuen Tse menunjukkan secara terpisah bahwa :

1. Bilangan $R(C_4, W_m) = 9, 10, 9$ secara berurutan, untuk $m = 4, 5$ dan 6.
2. Bilangan $R(C_4, W_m) = 11$, 12, 13, 14, 16 dan 17 secara berurutan, untuk $7 \leq m \leq 12$.

Makalah ini merupakan tinjauan ulang dari rujukan pustaka [3].

2 Batas Atas $R(C_4, W_m)$ untuk $m \geq 6$

Sebelum menentukan bilangan Ramsey tersebut terlebih dahulu akan dibahas tiga lema berikut.

Lema 1. *Misalkan G adalah sebuah graf dengan n titik sehingga $\overline{G}$ memuat roda $W_{m-1} = [a_0, A]$ dimana a_0 adalah **pusat** (hub) dan $A = \{a_1, a_2, ..., a_{m-1}\}$ adalah **jari-jari** (rim) dan $G \not\supseteq C_4$. Jika $\overline{G} \not\supseteq W_m$ maka $|N_A(y_1)| \geq m - 2$ untuk setiap $y_1 \in V(G) \backslash V(W_{m-1})$ dengan $y_1 a_0 \notin E(G)$.*

Lema 2. *Misalkan G adalah sebuah graf dengan n titik sehingga $\overline{G}$ memuat roda $W_{m-1} = [a_0, A]$ dimana a_0 adalah **pusat** (hub) dan $A = \{a_1, a_2, ..., a_{m-1}\}$ adalah **jari-jari** (rim) dan $G \not\supseteq C_4$. Misalkan $B = \{y_1 \in V(G) \backslash V(W_{m-1}) : y_1 a_0 \in E(G)\}$. Jika $G \not\supseteq W_m$ maka $|B| \leq 1$.*

Lema 3. *Misalkan G adalah sebuah graf dengan n titik sehingga $\overline{G}$ memuat roda $W_{m-1} = [a_0, A]$ dimana a_0 adalah **pusat** (hub) dan $A = \{a_1, a_2, ..., a_{m-1}\}$ adalah **jari-jari** (rim) dan $G \not\supseteq C_4$. Misalkan $B = \{y_1 \in V(G) \backslash V(W_{m-1}) : y_1 a_0 \in E(G)\}$ dan $D = \{x \in V(G) \backslash V(W_{m-1}) : x a_0 \in E(G)\}$. Jika $\overline{G} \not\supseteq W_m$ dan $|B| = 1$ maka $|D| \leq 2$.*

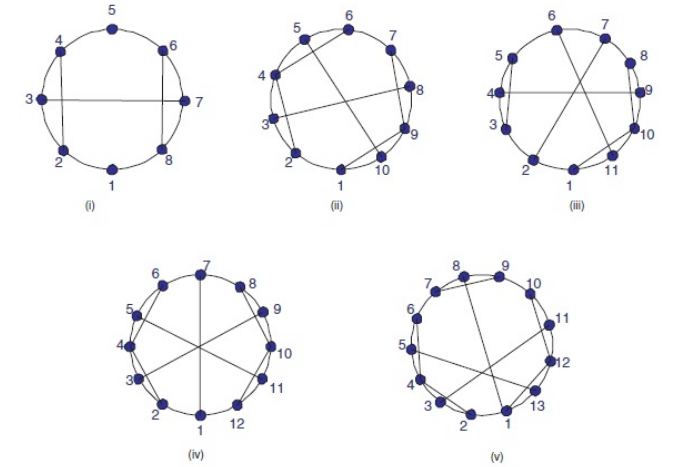
Berikut adalah hasil utama dari kajian ini.

Teorema 1. *Misal C_4 adalah graf siklus dengan empat titik dan W_m adalah graf roda dengan $m + 1$ titik. Maka $R(C_4, W_m) \leq m + \lceil \frac{m}{3} \rceil + 1$, untuk $m \geq 6$*

Bukti. Akan ditunjukkan dengan menggunakan induksi terhadap m. Berdasarkan Teorema 3.1 dan Teorema 3.2, telah diperoleh bahwa $R(C_4, W_k) \leq k + \lceil \frac{k}{3} \rceil + 1$, untuk $6 \leq k \leq 12$, karena diperoleh $R(C_4, W_k) - grafelok$ untuk $k = 6, 7, 8, 9, 10$. Asumsikan bahwa Teorema 3.3 tersebut berlaku untuk $m = k - 1 \geq 12$, yaitu $R(C_4, W_{k-1}) \leq k - 1 + \lceil \frac{k-1}{3} \rceil + 1$. Akan ditunjukkan bahwa $\overline{G} \supseteq W_k$, untuk $m \geq 13$.

Misalkan G adalah graf yang tidak memuat C_4. Akan ditunjukkan $\overline{G} \not\supseteq W_k$. Asumsikan bahwa, $\overline{G}$ harus memuat W_{k-1}. Misalkan a_0 pusat dari W_{k-1} dan $A = \{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}$ jari-jari dari W_{k-1}. Sebagai kontradiksi, misalkan $\overline{G} \not\supseteq W_k$.

Dengan Lema 3, diperoleh $|B| \leq 1$ dengan $B = \{y_1 \in V(G) \setminus V(W_{m-1}) : y_1 a_0 \in E(G)\}$. Misalkan $D = \{x \in V(G) \setminus V(W_{m-1}) : x a_0 \in E(G)\}$.



Gambar 1. *Ilustrasi $k = 6, 7, 8, 9, 10$.*

Pandang dua kasus berikut :

Kasus 1. $|B| = 1$.

Jika $|B| = 1$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} |D| &= k + \lceil \frac{k}{3} \rceil + 1 - |V(W_{k-1})| - |B| \\ &= k + \lceil \frac{k}{3} \rceil + 1 - k - 1 \\ &= \lceil \frac{k}{3} \rceil \geq 3. \end{aligned}$$

Sementara berdasarkan Lema 3, telah diperoleh bahwa $|D| \leq 2$. Hal ini kontradiksi dengan hasil yang diperoleh dari Kasus 1, yakni $|D| = \lceil \frac{k}{3} \rceil \geq 3$.

Kasus 2. $|B| = 0$.

Pada kasus ini diperoleh

$$\begin{aligned} |D| &= k + \lceil \frac{k}{3} \rceil + 1 - |V(W_{k-1})| - |B| \\ &= k + \lceil \frac{k}{3} \rceil + 1 - k - 0 \\ &= \lceil \frac{k}{3} \rceil + 1 \end{aligned}$$

Karena $|A| = k - 1$ dan $k \geq 13$, maka dengan Prinsip Pigeonhole kita peroleh $|N_A(x)| \leq 2$ untuk suatu $x \in D$.

Selanjutnya diperoleh W_k di $\overline{G}$ dengan x sebagai pusat karena $k \geq 13$ dan $k + \lceil \frac{k}{3} \rceil + 1$. Hasil ini kontradiksi dengan asumsi bahwa $\overline{G} \not\supseteq W_k$.

3 Kesimpulan

Untuk dua graf G dan H sebarang, bilangan Ramsey graf $R(G, H)$ merupakan banyaknya titik terkecil yang dipunyai suatu graf F sehingga F akan memuat

G atau $\overline{F}$ memuat H. Misalkan diberikan graf siklus C_4 dengan empat titik dan graf roda W_m dengan $m+1$ titik. Pada tulisan ini, telah dikaji tentang batas atas $R(C_4, W_m)$ untuk $m \geq 6$, yaitu

$$R(C_4, W_m) \leq m + \lceil \frac{m}{3} \rceil + 1, untuk m \geq 6.$$

4 Ucapan Terima Kasih

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan paper ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada : Ibu Lyra Yulianti, Bapak Syafrizal Sy, Bapak Zulakmal, dan Bapak Efendi yang telah bersedia membaca, menelaah, dan menguji naskah makalah ini.

5 Daftar Pustaka

1. Chartrand, Gary dan Ping Zhang. 2005. *Introduction to Graph Theory*. Singapore : The McGraw-Hill Companies.
2. Surahmat. 2003. *Bilangan Ramsey untuk Graf Roda*. ITB Bandung. *Disertasi-S3*. Tidak diterbitkan.
3. Surahmat, dkk. 2005. An Upper bound the Ramsey number of a cycle of lenght four versus Wheels. *Lecture Notes on Computer Sciences*. **3330** : 181 – 184.
4. Surahmat, E. T. Baskoro, and S.M. Nababan. The Ramsey Numbers for a Cycle of Length Four versus a Small Wheel, *Proceeding of the Eleventh National Conference on Mathematics*. Universitas Negeri Malang, Indonesia. July 22-25 (2005) : 172-178.