Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **1** Hal. 129 – 134
ISSN : 2303–291X

BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF $K_n \odot K_m$

AULI MARDHANINGSIH, ZULAKMAL

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
aulimardhaningsih@gmail.com

Abstrak. Misalkan G adalah graf terhubung dan c merupakan pewarnaan k yang sesuai dari G dengan warna $1, 2, \cdots, k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ adalah partisi $V(G)$ menjadi kelas-kelas warna yang saling bebas, dimana S_i merupakan himpunan titik dengan warna i, $1 \leq i \leq k$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik V didefinisikan sebagai vektor dengan banyak unsur k, yaitu

$$(d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i)$ adalah jarak dari v ke S_i, dengan $1 \leq i \leq k$. Jika untuk setiap dua titik yang berbeda u, v di G, $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$, maka c disebut pewarnaan kromatik lokasi dari G. Pewarnaan lokasi dengan minimum warna yang digunakan disebut pewarnaan lokasi minimum. Selanjutnya, kardinalitas dari himpunan yang memuat pewarnaan lokasi minimum disebut bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Misalkan terdapat graf G dan H sebarang. Graf korona $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan sebanyak $|V(G)|$ duplikat $H_1, H_2, \cdots, H_{|V(G)|}$ dari H, kemudian menghubungkan titik ke-i dari graf G ke setiap titik di H_i, $i = 1, 2, 3, \cdots, |V(G)|$. Pada tulisan ini akan dikaji kembali makalah [2] tentang bilangan kromatik lokasi dari graf $K_n \odot K_m$, untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 1$.

Kata Kunci: Pewarnaan Lokasi, Bilangan Kromatik Lokasi, Graf Korona

1. Pendahuluan

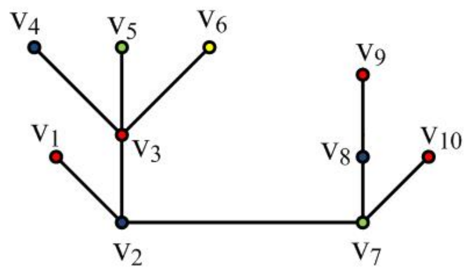
Suatu pewarnaan titik dengan k warna pada graf G adalah suatu pemetaan $c : V \rightarrow \{1, 2, \cdots k\}$ sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v bertetangga. Jika banyaknya warna yang digunakan sebanyak k maka G dikatakan mempunyai k pewarnaan. Bilangan kromatik dari G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga, jika titik-titik di G diwarnai dengan k warna maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$. Misalkan $\chi(G) = k$, ini berarti titik-titik di G paling kurang diwarnai dengan k warna dan tidak dapat diwarnai dengan $k - 1$ warna.

Kelas warna pada G dinotasikan dengan S_i, merupakan himpunan titik-titik yang berwarna i dan $1 \leq i \leq k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$ berdasarkan suatu pewarnaan titik, maka representasi v terhadap Π disebut kode warna dari v dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai vektor $-k$:

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x|x \in S_i)\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi.

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut. Misal diberikan suatu graf G dengan orde $k = 10$ dan kelas warna $S_1 = \{v_1, v_3, v_9, v_{10}\}$, $S_2 = \{v_2, v_4, v_8\}$, $S_3 = \{v_5, v_7\}$, $S_4 = \{v_6\}$ (Gambar 1). Kode warna dari titik-titik di graf G terhadap



Gambar 1. Pewarnaan c pada Graf G

$\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ adalah:

- $c_\Pi(v_1) = (d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3), d(v_1, S_4)) = (0, 1, 2, 3)$,
- $c_\Pi(v_2) = (d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3), d(v_2, S_4)) = (1, 0, 1, 2)$,
- $c_\Pi(v_3) = (d(v_3, S_1), d(v_3, S_2), d(v_3, S_3), d(v_3, S_4)) = (0, 1, 1, 1)$,
- $c_\Pi(v_4) = (d(v_4, S_1), d(v_4, S_2), d(v_4, S_3), d(v_4, S_4)) = (1, 0, 2, 2)$,
- $c_\Pi(v_5) = (d(v_5, S_1), d(v_5, S_2), d(v_5, S_3), d(v_5, S_4)) = (1, 2, 0, 2)$,
- $c_\Pi(v_6) = (d(v_6, S_1), d(v_6, S_2), d(v_6, S_3), d(v_6, S_4)) = (1, 2, 2, 0)$,
- $c_\Pi(v_7) = (d(v_7, S_1), d(v_7, S_2), d(v_7, S_3), d(v_7, S_4)) = (1, 1, 0, 3)$,
- $c_\Pi(v_8) = (d(v_8, S_1), d(v_8, S_2), d(v_8, S_3), d(v_8, S_4)) = (1, 0, 1, 4)$,
- $c_\Pi(v_9) = (d(v_9, S_1), d(v_9, S_2), d(v_9, S_3), d(v_9, S_4)) = (0, 1, 2, 5)$,
- $c_\Pi(v_{10}) = (d(v_{10}, S_1), d(v_{10}, S_2), d(v_{10}, S_3), d(v_{10}, S_4)) = (0, 2, 1, 4)$.

Dari contoh diatas dapat dilihat bahwa pewarnaan c yang menggunakan empat warna pada G adalah pewarnaan lokasi dengan kardinalitas paling kecil. Oleh karena itu, bilangan kromatik lokasi dari graf G, $\chi_L(G) = 4$.

Lema 1.1. [*1*] *Misalkan terdapat graf G yang terhubung non trivial. Misalkan c pewarnaan lokasi untuk G dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u, v\}$, sehingga u dan v adalah dua titik dengan warna berbeda.*

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G kedalam kelas warna S_i untuk suatu titik $u, v \in V(G)$.

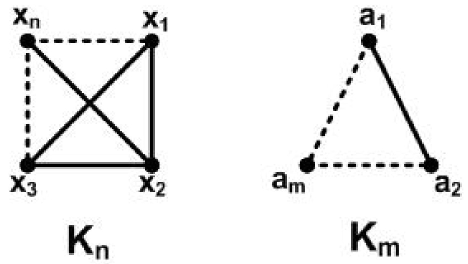
Akan dibuktikan dengan menggunakan kontradiksi. Andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal

S_i dari Π. Akibatnya $d(u, S_i) = d(v, S_i) = 0$ karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $d(u, S_j) = d(v, S_j)$ untuk $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi, ini kontradiksi dengan permisalan bahwa $c(u) = c(v)$. Sehingga diperoleh $c(u) \neq c(v)$ dengan u dan v suatu pewarnaan yang berbeda. □

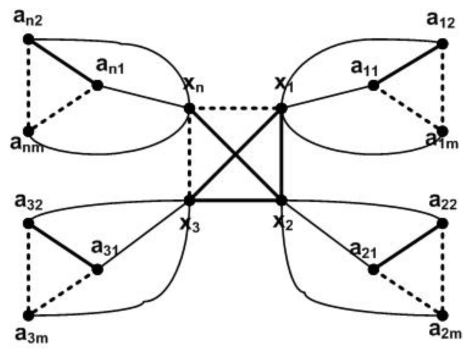
2. Graf Hasil Korona Dua Graf Lengkap K_n dan K_m

Graf $K_n \odot K_m$ adalah graf yang diperoleh dari graf lengkap K_n dengan n titik dan graf lengkap K_m dengan m titik dengan cara menghubungkan setiap m buah titik salinan ke $-i$ dari graf lengkap K_m ke titik x_i di graf lengkap K_n untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Salinan adalah graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi yang sama dari graf K_n.

Perhatikan graf $K_n \odot K_m$ pada Gambar 2 berikut. Misal terdapat graf K_n dengan $V(K_n) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ dan graf K_m dengan $V(K_{mi}) = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im}\}$ dimana K_{mi} adalah salinan ke $-i$ dari graf K_m untuk $i = 1, 2, \cdots, n$.



Gambar 2. Graf K_n dan K_m



Gambar 3. Graf $K_n \odot K_m$

3. Penentuan Bilangan Kromatik Lokasi dari $K_n \odot K_m$, dengan $n, m \geq 1$

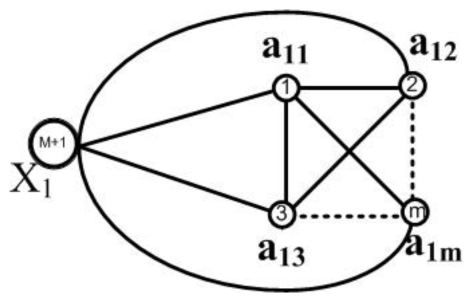
Pada Teorema 3.1 berikut disajikan kembali tentang penentuan bilangan kromatik lokasi untuk hasil korona dua graf lengkap, seperti yang telah diperoleh dalam makalah [1].

Teorema 3.1. [*1*] *Bilangan kromatik lokasi dari $K_n \odot K_m$, untuk $n, m \geq 1$ sebagai berikut.*

$$\chi_L(K_n \odot K_m) = \begin{cases} m+1, \textit{jika } n = 1, \\ m+2, \textit{jika } 2 \leq n \leq m+2, \\ n, \textit{jika } n > m+2. \end{cases}$$

Bukti. Misal diberikan dua buah graf K_n dan K_m. Pembuktian diberikan dalam tiga Kasus.
Kasus 1. $n = 1$.
Akan ditunjukkan bahwa untuk $n = 1$ bilangan kromatik lokasi dari graf $K_n \odot K_m$ adalah $\chi_L(K_n \odot K_m) = m + 1$.

Untuk $n = 1$, misalkan $V(K_1) = \{x_1\}, V(K_m) = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ dan $E(K_m) = \{a_i a_j | i = 1, 1 \leq j \leq m\}$. Selanjutnya $V(K_1 \odot K_m) = \{x_1, a_1, \cdots, a_m\}$ dan $E(K_1 \odot K_m) = \{x_1 a_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{a_i a_j | i = 1, 1 \leq j \leq m\}$.



Gambar 4. Pewarnaan Lokasi Minimum Dari Graf $K_n \odot K_m$, $n = 1$

Karena K_m adalah graf lengkap dimana setiap titiknya bertetangga dan $K_1 \odot K_m$ adalah graf terhubung maka semua titik-titik di $K_1 \odot K_m$ bertetangga. Sesuai dengan definisi pewarnaan lokasi bahwa setiap yang bertetangga memiliki kode warna yang berbeda, maka haruslah bilangan kromatik lokasi untuk graf $K_1 \odot K_m$ adalah $\chi_L(K_n \odot K_m) = m + 1$.

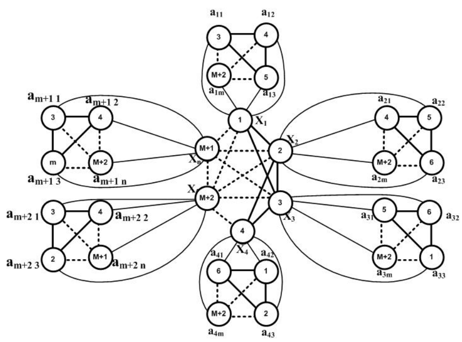
Kasus 2. $2 \leq n \leq m + 2$.
Akan dibuktikan bahwa untuk $2 \leq n \leq m + 2$, bilangan kromatik lokasi dari graf $K_n \odot K_m$ adalah $\chi_L(K_n \odot K_m) = m + 2$.
Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} V(K_n) &= \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \\ V(K_{mi}) &= \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im} | 1 \leq i \leq n\} \\ &= \{a_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \end{aligned}$$

Dikontruksikan pewarnaan c untuk graf $K_n \odot K_m$ sebagai berikut :

$$c(x_i) = i, i \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

$$c(V(H_i)) = \begin{cases} [1, m+2] - \{i, i+1\}, & \text{jika } i \neq m+2, \\ [1, m+2] - \{1, i\}, & \text{selainnya.} \end{cases}$$



Gambar 5. Pewarnaan Lokasi Minimum Dari Graf $K_n \odot K_m,\ 2 \leq n \leq m+2$

Sekarang akan ditunjukkan bahwa c adalah pewarnaan lokasi pada $K_n \odot K_m$. Jika $d(u, x_1) = d(v, x_1)$ maka terdapat tiga Kasus berikut.

Kasus 2.1. Misalkan $u = x_k$ dan $v = x_l$, untuk suatu k, l. Maka u dan v berada pada kelas warna yang berbeda.

Kasus 2.2. Jika $u = x_i$ dan $v = a_{1k}$, untuk suatu $i \neq 1$ dan $i \neq k$. Maka jarak $d(u, S_2) \neq d(v, S_2)$, sehingga kode warna pada u dan v tidak sama.

Kasus 2.3. Jika $u = a_{it}$ dan $v = a_{js}$, untuk suatu i, j, t, s. Maka jarak $d(u, S_1) \neq d(v, S_1)$ atau $d(u, S_{i+1}) \neq d(v, S_{i+1})$ dimana $1 \leq i \leq m$. Sehingga berdasarkan definisi pewarnaan lokasi, diperoleh bahwa setiap titik memiliki kode warna yang berbeda.

Oleh karena itu terbukti bahwa c adalah pewarnaan lokasi dan bilangan kromatik lokasi dari $K_n \odot K_m$ yaitu $\chi_L(K_n \odot K_m) = m + 2$ untuk $2 \leq n \leq m + 2$.

Kasus 3. $n > m + 2$.

Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(K_n \odot K_m) = n$.

Definisikan pewarnaan berikut $c(x_i) = i$ dan $c(V(H_i) = X_i$, dimana X_i sebarang sub himpunan dengan anggota m dari $\{1, 2, \cdots, n\}$ yang tidak memuat warna i dan warna $i + 1 \bmod n$.

Karena $|V(K_n)| > m + 2$ dan graf K_n adalah graf lengkap yang berarti setiap titiknya bertetangga maka berdasarkan definisi pewarnaan pada graf dimana setiap titik yang bertetangga memiliki kode warna yang berbeda, maka diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi $K_n \odot K_m$ adalah $\chi_L(K_n \odot K_m) = n$. □

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah dikaji kembali makalah [2] tentang bilangan kromatik lokasi untuk graf $K_n \odot \overline{K}_m$ untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 1$, sebagai berikut:

$$\chi_L(K_n \odot K_m) = \begin{cases} m+1, \text{jika } n = 1, \\ m+2, \text{jika } 2 \leq n \leq m+2, \\ n, \text{jika } n > m+2. \end{cases}$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Narwen, M.Si, Bapak Dr. Admi Nazra dan Bapak Drs Syafruddin, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] Baskoro, E.T, and Purwasih, I.A, (2012). The locating-chromatic number for corona product of graphs. *Southeast-Asian J. of Sciences* **1** (1): 124 – 134

[2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications.* Macmillan, London.

[3] Buckey, F dan Lewinter, M.2003. *A Friendly Introduction to Graph Theory.* Prentice Hall, New Jersey.

[4] Chartrand, G.,dkk. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull Inst Combin. Appl* **36**: 89 – 101

[5] Chartrand, G.,dkk. 2003. Graphs of order n with locating-chromatic number $n-1$. *Discrete Math* **269** (1 – 3): 65 – 79.

[6] Iswadi, H. 2011. Bilangan Dominasi Lokasi Metrik dari Graf Hasil Operasi Korona. *Prosiding Seminar Nasional Matematika Universitas Andalas*,pp 22 – 29, ISSN 978-602-19249-0-7.