Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **3** Hal. 1 – 6
ISSN : 2303–291X

DIMENSI PARTISI DARI GRAF ULAT

FADHILA TURRAHMAH, BUDI RUDIANTO
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : fadhila.turrahmah37@gmail.com

Abstrak. Misalkan terdapat suatu graf sebarang $G = (V, E)$, dimana V adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi. Misalkan terdapat suatu titik $v \in V(G)$ dan suatu himpunan $S \subset V(G)$. Jarak antara titik v dan himpunan S, dinotasikan $d(v, S)$, didefinisikan sebagai $d(v, S) = \min\{d(v, x) \mid x \in S\}$, dimana $d(v, x)$ adalah jarak antara dua titik v dan x di G. Definisikan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ sebagai himpunan yang berisikan k-partisi tersebut. Suatu representasi titik $v \in V(G)$ terhadap himpunan Π dapat ditulis dalam bentuk k-vektor:

$$r(v \mid \Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k)).$$

Jika untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u \mid \Pi) \neq r(v \mid \Pi)$, maka Π disebut *partisi pembeda* dari $V(G)$. Partisi pembeda Π dengan kardinalitas minimum disebut *partisi pembeda minimum* dari G. Dimensi partisi dari graf G, dinotasikan $pd(G)$, adalah kardinalitas dari partisi pembeda minimum dari G. Pada tulisan ini akan dibahas kembali salah satu bagian dari disertasi [5] tentang penentuan dimensi partisi dari suatu graf ulat.

Kata Kunci: Representasi titik, dimensi partisi, graf ulat

1. Pendahuluan

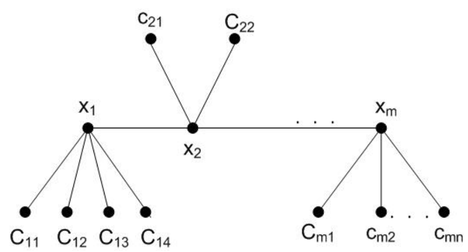
Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$, dimana V adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi. Misalkan terdapat suatu titik $v \in V(G)$ dan suatu subhimpunan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v, S)$, dapat dituliskan sebagai $d(v, S) = \min\{d(v, x) \mid x \in S\}$, dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Misalkan terdapat $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ yang merupakan himpunan yang memuat k-partisi tersebut. Untuk setiap titik $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai

$$r(v \mid \Pi) = \{d(v, S_1), \cdots, d(v, S_k)\}.$$

Jika setiap titik di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut *partisi penyelesaian*. Jika untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u \mid \Pi) \neq r(v \mid \Pi)$, maka Π disebut *partisi pembeda* dari $V(G)$. Partisi pembeda Π dengan kardinalitas minimum disebut *partisi pembeda minimum* dari G. Kardinalitas dari partisi penyelesaian minimum disebut dimensi partisi dari G, ditulis $pd(G)$.

Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ adalah partisi terurut dari $V(G)$. Jika $u \in S_i$ dan $v \in S_i$, dan $i \neq j$, maka jelas bahwa $r(u \mid \Pi) \neq r(v \mid \Pi)$ (karena $d(u, S_i) = 0$, tetapi $d(v, S_i) \neq 0$). Dengan demikian, ketika diberikan suatu partisi Π dari $V(G)$ dan hendak ditentukan apakah Π adalah partisi pembeda untuk $V(G)$ atau bukan, pemeriksaan cukup dilakukan pada semua titik dalam setiap kelas partisi yang sama. Andaikan terdapat dua titik u dan v di kelas partisi yang berbeda, namakan S_1 dan S_2. Selanjutnya, karena $d(u, S_1) = 0$ dan $d(v, S_1) \neq 0$, maka representasi titik u dan v pasti berbeda di entri ke-1. Secara umum, setiap dua titik yang berbeda di kelas partisi yang berbeda akan punya representasi yang berbeda.

Graf ulat adalah graf pohon yang memiliki sifat apabila dihapus semua daunnya akan menghasilkan lintasan [5]. Misalkan terdapat graf lintasan P_m dengan himpunan titik $V(P_m) = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ dan himpunan sisi $E(P_m) = \{x_1x_2, \cdots, x_{m-1}x_m\}$. Graf ulat diperoleh dengan menambah n_i titik daun pada setiap titik x_i dari sebuah graf lintasan P_m dengan $1 \leq i \leq m$ dan dinotasikan dengan $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$, seperti pada Gambar 1.

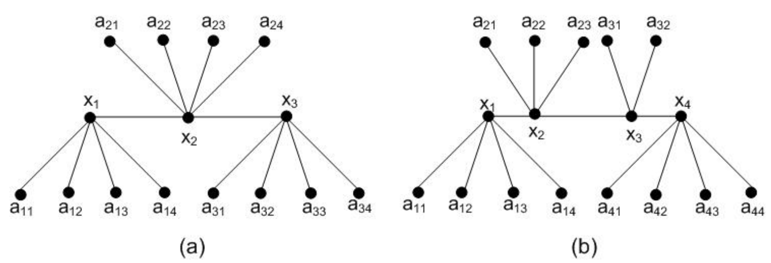


Gambar 1. Graf ulat $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$

Notasikan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf ulat $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ sebagai berikut.

$$V(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)) = \{x_i \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i\},$$
$$E(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)) = \{x_ix_{i+1} \mid 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{x_ia_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i\}.$$

Jika $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = n$, maka graf ulat tersebut dinamakan *graf ulat homogen*, dan dinotasikan dengan $C(m; n)$. Dua contoh graf ulat homogen dan tak homogen diberikan pada Gambar 2.



Gambar 2. (a) Graf ulat homogen $C(3; 4)$ (b) Graf ulat tak homogen $C(4; 4, 3, 2, 4)$

2. Dimensi Partisi Graf Ulat

Misalkan terdapat graf ulat $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$. Dapat dilihat bahwa setiap graf $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ memuat tepat m buah subgraf K_{1,n_i}. Notasikan himpunan titik dan sisi dari K_{1,n_i} sebagai berikut.

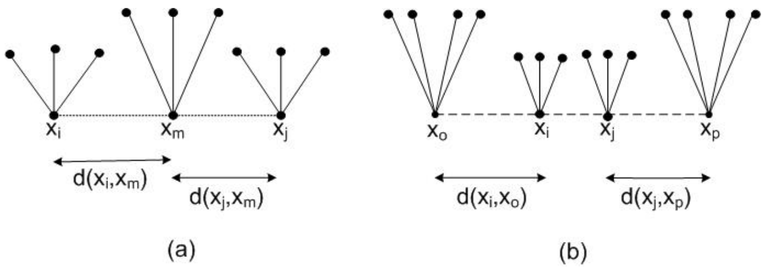
$$V(K_{1,n_i}) = \{a_{ij} \mid 1 \leq j \leq n_i\} \cup \{x_i\},$$
$$E(K_{1,n_i}) = \{x_i a_{ij} \mid 1 \leq j \leq n_i\}.$$

Didefinisikan $n_{\max} = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_m\}$. Subgraf $K_{1,n_{\max}}$ disebut sebagai *subgraf ulat maksimum* dari $C(m; , n_1, n_2, \cdots, n_m)$. Misalkan terdapat p buah $K_{1,n_{\max}}$. Maka subgraf bintang maksimum didefinisikan dari kiri ke kanan sebagai $K^i_{1,n_{\max}}$ untuk $1 \leq i \leq p$.

Definisi 2.1. [5] *Misalkan $K_{1,n_i}, K_{1,n_j} \subset C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$, dengan $1 \leq i \neq j \leq m$. Jika $n_i = n_j = n_{\max} - 1$, sedemikian sehingga*

(1) $d(x_i, x_m) = d(x_j, x_m)$, dimana x_m adalah anggota dari suatu $K_{1,n_{\max}}$ (lihat Gambar 3a),

(2) $d(x_i, x_o) = d(x_j, x_p)$, dengan x_o dan x_p masing-masing anggota dari suatu $K_{1,n_{\max}}$ yang berbeda (lihat gambar 3b), maka subgraf K_{1,n_i} dan K_{1,n_j} disebut subgraf ulat berjarak sama.



Gambar 3. Dua kondisi subgraf graf ulat K_{1,n_i} dan K_{1,n_j}.

Lema 2.2. [5] *Misalkan Π adalah partisi pembeda untuk $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ dan $K_{1,n_i} \subset C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$. Jika u dan v adalah sebarang dua daun berbeda di suatu K_{1,n_i}, dengan $n_i \geq 2$, maka u dan v harus berada dalam kelas partisi yang berbeda di Π.*

Lema 2.3. [5] *Misalkan Π adalah partisi pembeda untuk $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$. Jika $K^i_{1,n_{\max}}$ dan $K^j_{1,n_{\max}}$ dua subgraf ulat maksimum, dengan $i \neq j$, maka $x_i \in V(K^i_{1,n_{\max}})$ dan $x_j \in V(K^j_{1,n_{\max}})$ harus termuat dalam kelas partisi yang berbeda di Π.*

Lema 2.4. [5] *Misalkan Π adalah partisi pembeda untuk $(C(m; n_1, \cdots, n_m))$, $m \geq 2$. Jika sebarang dua subgraf berbeda $K_{1,n_i}, K_{1,n_j} \subset C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ berjarak sama dan seberang dua daun $a_{i,k} \in K_{1,n_i}$ dan $a_{j,k} \in K_{1,n_j}$, dengan $1 \leq k \leq n_i$*

termuat dalam partisi yang sama, maka x_i dan x_j harus termuat dalam kelas partisi yang berbeda di Π.

Pada Teorema 2.5 berikut diberikan kriteria penentuan dimensi paritisi dari graf ulat $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$.

Teorema 2.5. *[5] Misalkan $K_{1,n_{\max}}$ adalah subgraf ulat maksimum dari $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ dan p menyatakan banyak subgraf $K_{1,n_{\max}}$. Maka untuk $n_{\max} \geq 3$, dimensi partisi graf ulat $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ adalah*

$$pd(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)) = \begin{cases} n_{\max} & , \text{ jika } p \leq n_{\max}, \\ n_{\max} + 1 & , \text{ jika } p > n_{\max}. \end{cases}$$

Bukti. Pandang dua kasus berikut.
Kasus 1. Untuk $p \leq n_{\max}$.
Misalkan terdapat suatu partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_p\}$. Karena setiap daun pada K_{1,n_i}, termuat dalam kelas partisi yang berbeda dan $K_{1,n_{\max}}$ memiliki $n_{\max}$ daun, maka sedikitnya terdapat $n_{\max}$ kelas partisi di Π untuk $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$. Dengan demikian $p \geq n_{\max}$.

Selanjutnya pandang graf $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$. Misalkan terdapat suatu partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_{n_{\max}}\}$ untuk graf $V(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m))$, sehingga setiap titik $v \in V(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m))$ terdapat dalam suatu kelas partisi $S_j \in \Pi$, untuk suatu $1 \leq j \leq n_{\max}$.

Berikut adalah langkah-langkah penentuan dimensi partisi dari graf $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$, apabila $p \leq n_{\max}$.

(a) Hitung banyak subgraf $K_{1,n_{\max}}$ dan nyatakan dengan p. Notasikan masing-masing subgraf tersebut, secara berurut dari kiri ke kanan, dengan $K^k_{1,n_{\max}}$, dengan $1 \leq k \leq p$.
(b) Setiap titik $x_k \in V(K^k_{1,n_{\max}})$ secara berurut diletakkan pada kelas partisi S_j untuk suatu $1 \leq j \leq p$.
(c) Setiap daun pada $K_{1,n_{\max}}$ secara berurut diletakkan pada kelas partisi $S_1, S_2, \cdots, S_{n_{\max}}$.
(d) Definisikan A_1 sebagai selang terbuka sebelum graf bintang $K^1_{1,n_{\max}}$, A_{k+1} sebagai selang terbuka antara $K^k_{1,n_{\max}}$ dan $K^{k+1}_{1,n_{\max}}$, dengan $1 \leq k \leq p-1$ dan A_{p-1} sebagai selang terbuka setelah $K^p_{1,n_{\max}}$.
(e) Definisikan himpunan $T = \{$Semua kombinasi $(n_{\max -1})$ dari $n_{\max}$ buah kelas partisi di $\Pi\}$, sedemikian sehingga $T = \{T_1, T_2, \cdots, T_{n,\max}\}$ dengan $T_i \in T$ adalah kombinasi yang tidak memuat kelas partisi S_i.
(f) Identifikasi letak subgraf K_{1,n_i} pada selang sebagaimana yang didefinisikan oleh langkah (d).
(g) Jika K_{1,n_i} terletak pada selang A_1 atau A_2 maka setiap daun pada K_{1,n_i} secara berurutan diletakkan pada kelas partisi yang berasosiasi dengan T_1.
(h) Jika K_{1,n_i} terletak pada selang A_k, dengan $3 \leq k \leq p+1$ maka setiap daun pada K_{1,n_i} secara berurut diletakkan pada kelas partisi yang berasosiasi dengan T_{k-1}.

(i) Jika K_{1,n_i} dan K_{1,n_j} berjarak sama terhadap suatu $K_{1,n_{\max}}$, maka $x_i \in V(K_{1,n_i})$ dan $V(K_{1,n_j})$ harus termuat dalam kelas partisi yang berbeda di Π.

(j) Setiap titik pusat $x_k \in V(K^k_{1,n_i})$, dengan K^k_{1,n_i} bukan subgraf ulat maksimum dan subgraf ulat berjarak sama, x_k diletakkan pada kelas partisi yang memuat salah satu daunnya.

Untuk memastikan bahwa Π adalah partisi pembeda dari graf ulat, pandang sebarang dua titik berbeda $u, v \in V(C(m, n_1, n_2, \cdots, n_m))$ sedemikian sehingga u dan v berada dalam kelas partisi yang sama. Jika daun $u \in V(K_{1,n_i})$ dan $u \in V(K_{1,n_j})$, dengan $n_i = n_j = n_{\max}$, maka u dan v dibedakan oleh sebuah kelas partisi yang memuat x_i atau x_j. Jika daun $u \in V(K_{1,n_i})$ dan $v \in V(K_{1,n_j})$, dengan K_{1,n_i} dan K_{1,n_j} berada dalam selang yang berbeda, katakan A_o dan A_p, maka u dan v dibedakan oleh kelas partisi S_o atau S_p. Jika daun $u \in K_{1,n_i}$ dan $v \in K_{1,n_j}$, dengan K_{1,n_i} dan K_{1,n_j} berada dalam selang yang sama, katakan A_o, dan subgraf K_{1,n_i} dan K_{1,n_j} tidak berjarak sama, maka u dan v dibedakan oleh kelas partisi S_o. Jika K_{1,n_i} dan K_{1,n_j} berjarak sama maka u dan v dibedakan oleh kelas partisi yang memuat x_i atau x_j.

Selanjutnya, jika daun $u \in K_{1,n_i}$ dan $v \in K_{1,n_j}$ dengan n_i atau n_j adalah $n_{\max}$, maka u dan v dibedakan kelas partisi X, dengan X adalah kelas partisi yang memuat daun K_{1,n_i} tetapi tidak memuat daun K_{1,n_j}. Dengan demikian, untuk setiap $u, v \in V(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m))$, maka $r(u \mid \Pi) \neq r(v \mid \Pi)$.

Kasus 2. Untuk $p > n_{\max}$ Misalkan terdapat suatu partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_p\}$ untuk $V(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m))$. Jika $p > n_{n_{\max}}$ maka menurut Lema 2.2, terdapat paling sedikit dua buah titik $x_i \in V(K^i_{1,n_{\max}})$ dan $x_j \in V(K^j_{1,n_{\max}})$, sedemikian sehingga titik x_i dan x_j termuat dalam kelas partisi yang sama, kontradiksi. Dengan demikian $p \geq n_{\max} + 1$.

Selanjutnya, definisikan partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_{n_{\max}+1}\}$ untuk graf $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$. Berikut adalah langkah-langkah penentuan dimensi partisi dari graf $(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m))$, apabila $p > n_{\max}$.

(a) Setiap daun pada $V(K_{1,n_i})$, dengan $1 \leq i \leq m$, secara berurut diletakkan pada kelas partisi $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{n_i}$.

(b) Letakkan titik x_1 pada kelas partisi $S_{n_{\max}+1}$.

(c) Letakkan titik x_i lainnya sedemikian sehingga $x_2 \in S_1, x_3 \in S_2$, $x_4 \in S_3, x_i \in S_{ni}$ dan seterusnya dengan pola pengulangan yang sama.

Pandang sebarang dua titik berbeda $u, v \in V(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m))$ sedemikian sehingga titik u dan v termuat dalam kelas partisi yang sama. Jika $u \in V(K_{1,n_i})$ dan $v \in V(K_{1,n_j})$, untuk $i \neq j$ maka jarak $d(u, S_{n_{\max}+1}) \neq d(v, S_{n_{\max}+1})$ dan oleh karena itu $r(u \mid \Pi) \neq r(v \mid \Pi)$. Jika titik $u \in V(K_{1,n_i}) - \{x_i\}$ dan $v = x_{i+1}$, untuk suatu i pada selang tertutup $1 \leq i \leq m - 1$, maka u dan v dibedakan oleh sedikitnya satu kelas partisi $X \in \Pi$, dengan X adalah kelas partisi yang memuat daun $K_{1,n_{i+1}}$, sedemikian sehingga $d(v, X) = 1$ dan $d(u, X) \neq 1$. Oleh karena itu, $r(u \mid \Pi) \neq r(v \mid \Pi)$. Dengan demikian, setiap titik $v \in V(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m))$ mempunyai representasi yang berbeda dan $pd(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m) \leq n_{\max} + 1$. $\square$

3. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Bapak Narwen, M.Si, dan Bapak Syafruddin, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bona, M. (2002). *A Walk Through Combinatorics*. World Scientific Publishing. Singapore.
[2] Chartrand dkk. (1998). On the partition dimension of graph. *Congressus Numerantium* **130**: 157 – 168.
[3] Chartrand, G., Eroh, L., Jhonson, M., dan Oellerman, O.R. (2000). Resolvability in graph and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*. **105**: 99 – 113.
[4] Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, p. (2000). The partition dimension of a graph. *Aequationes Math* **59**: 45 – 54.
[5] Darmaji. (2011). *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung*. Disertasi Doktor. tidak diterbitkan. Program Studi Matematika Institut Teknologi Bandung. ITB.