BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* UNTUK BEBERAPA GRAF *THORN*

MELVI MUCHLIAN

*Program Studi Magister Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 email : melvimuchlian@gmail.com*

Abstrak. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung tak *trivial*. Definisi pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in N$, dimana dua sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan $u - v$ path P di G dinamakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang berwarna sama. Graf G disebut *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path*. Pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring*. Bilangan *Rainbow connection* dari graf terhubung G , ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected*. Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G . Untuk dua titik u dan v di G , *rainbow $u - v$ geodesic* pada G adalah *rainbow $u - v$ path* yang panjangnya $d(u, v)$ dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v (panjang $u - v$ path terpendek di G). Graf G dikatakan *strongly rainbow connected* jika G memiliki suatu *rainbow $u - v$ geodesic* untuk setiap dua titik u dan v di G . Minimum k yang terdapat pada pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga G adalah *strongly rainbow connected* dikatakan bilangan *strong rainbow connection*, $src(G)$, di G . Jadi, $rc(G) \leq src(G)$ untuk setiap graf terhubung di G . Pada paper ini akan diulas kembali tentang Bilangan *Rainbow Connection* untuk Beberapa Graf *Thorn*.

Kata Kunci: Bilangan *Rainbow Connection*, graf *Thorn*

1. Pendahuluan

Konsep *rainbow connection* dari suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, Johns, McKeon dan Zhang [3] pada tahun 2008. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung tak *trivial*. Definisi pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in N$, dimana dua sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan $u - v$ path P di G dinamakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang berwarna sama. Graf G disebut *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path*.

Pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring*. Jelas jika G adalah *rainbow connected*, maka G terhubung. Sebaliknya, setiap graf terhubung memiliki pewarnaan sisi *trivial* sehingga G bersifat *rainbow connected*, yaitu setiap sisi diwarnai dengan warna berbeda. Bilangan *Rainbow connection* dari graf terhubung G , ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rain-*

bow connected. Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan sebanyak $rc(G)$ warna dikatakan *minimum rainbow coloring*.

Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G . Untuk dua titik u dan v di G , *rainbow $u - v$ geodesic* pada G adalah *rainbow $u - v$ path* yang panjangnya $d(u, v)$ dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v (panjang $u - v$ path terpendek di (G)). Graf G dikatakan *strongly rainbow connected* jika G memiliki suatu *rainbow $u - v$ geodesic* untuk setiap dua titik u dan v di G . Dalam kasus ini, pewarnaan c dikatakan *strong rainbow coloring* di G . Minimum k yang terdapat pada pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga G adalah *strongly rainbow connected* dikatakan bilangan *strong rainbow connection* atau *strong rainbow connection number*, $src(G)$, di G . Suatu *strong rainbow coloring* di G yang menggunakan $src(G)$ warna dikatakan *minimum strong rainbow coloring* di G . Jadi, $rc(G) \leq src(G)$ untuk setiap graf terhubung di G [3]. Selanjutnya, jika G adalah graf terhubung tak *trivial* dengan ukuran m dan $diam(G) = \max\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$, maka

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m.$$

Pada paper ini akan dikaji tentang Bilangan *Rainbow Connection* untuk Beberapa Graf *Thorn*.

2. Bilangan *Rainbow Connection*

Berikut disajikan kembali propositionosisi yang membahas tentang graf G yang mempunyai $rc(G)$ dan $src(G)$ 1, 2 dan m .

Proposisi 2.1. [3] Misalkan G adalah suatu graf terhubung tak *trivial* yang berukuran m . Maka

- (1) $rc(G) = src(G) = 1$ jika dan hanya jika G merupakan graf lengkap,
- (2) $rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$, dan
- (3) $rc(G) = src(G) = m$ jika dan hanya jika G suatu graf pohon.

Proposisi 2.2. [3] Untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 4$, $rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Definisi 2.3. [7] Misalkan $l_1, l_2, \dots, l_n$ adalah bilangan-bilangan bulat positif dan G adalah suatu graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. *Thorn* dari graf G , dengan parameter $l_1, l_2, \dots, l_n$ diperoleh dengan menghubungkan l_i titik baru berderajat 1 ke titik v_i dari graf G ($i \in 1, \dots, n$).

Graf *thorn* dari graf G dinotasikan dengan G^* atau $G^*(l_1, l_2, \dots, l_n)$ jika masing-masing parameter ditentukan. Contoh graf *thorn* diperlihatkan pada Gambar 1.

Teorema berikut menyajikan bilangan *rainbow connection* untuk graf *thorn* dari graf lengkap. Pada teorema berikut akan ditinjau graf *thorn* untuk setiap $l_i \geq n$ ($i \in \{1, \dots, n\}$)

Teorema 2.4. [7] Untuk $n \geq 1$ dan $l_i \geq n$, berlaku

$$rc(K_n^*) = src(K_n^*) = \sum_{i=1}^n l_i.$$

 Gambar 1. Graf $C_4^*(l_1, l_2, \dots, l_4)$.

Bukti. Perhatikan bahwa u_{ij} adalah *thorn* dari titik $v_i (i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, l_i\})$. Perhatikan Gambar 2.

 Gambar 2. Graf K_n^*

Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $rc(K_n^*) \leq \sum_{i=1}^n l_i$. Karena semua *path* dari $u_{i_1 j_1}$ ke $u_{i_2 j_2}$ perlu melalui sisi $u_{i_1 j_1} v_{i_1}, v_{i_2} u_{i_2 j_2}$, ini jelas bahwa warna dari sisi $v_i u_{ij}$ dimana $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, l_i\})$ haruslah berbeda. Dengan kata lain, ini merupakan syarat perlu untuk *rainbow connectivity* suatu graf. Oleh karena itu, dalam pewarnaan ini warnai semua sisi *thorn* $v_i u_{ij}$ dengan $c(v_i u_{ij}) = j^{(i)}$ dimana $j^{(i)}, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$ terlebih dahulu sebagai kode pewarnaan dari sisi graf.

Warnai sisi lain dengan cara berikut.

$$\begin{aligned} c(v_i v_j) &= (j+1)^{(i+1)}, \text{ untuk } i < j < n, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, l_i\}, \\ c(v_i v_n) &= 1^{(i+1)}, \text{ untuk } i \in \{1, \dots, n\}, \\ c(v_n v_1) &= 2^{(2)}. \end{aligned}$$

Hal ini jelas bahwa lintasan dari $u_{i_1 j_1} v_{i_1} - v_{i_1} v_{i_2} - v_{i_2} u_{i_2 j_2}$ dengan pewarnaan $j_1^{(i_1)} - (i_2 + 1)^{(i_1+1)} - j_2^{(i_2)}$ sedangkan $u_{i_1 j_1} v_{i_1} - v_{i_1} v_n - v_n u_{n j_2}$ dengan pewarnaan $j_1^{(i_1)} - 1^{(i_1+1)} - j_2^{(n)}$. $j_1^{(n)} - 2^{(2)} - j_2^{(1)}$ adalah kode pewarnaan dari lintasan $u_{n j_1} v_n - v_n v_1 - v_1 u_{1 j_2}$. Semua lintasan dari graf memiliki warna yang berbeda. Dengan kata lain, setiap dua titik dari graf K_n^* merupakan lintasan *rainbow connected* dengan $\sum_{i=1}^n l_i$ warna. Jadi, dapat dibangun sebuah *rainbow* $\sum_{i=1}^n l_i$ -coloring

dari K_n^* sehingga dapat membuat graf K_n^* *rainbow connected*. Ini berarti bahwa $rc(K_n^*) \leq \sum_{i=1}^n l_i$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $rc(K_n^*) \geq \sum_{i=1}^n l_i$. Asumsikan berlawanan sehingga $rc(K_n^*) \leq \sum_{i=1}^n l_i - 1$. Misalkan c^1 adalah *rainbow* $\sum_{i=1}^n l_i - 1$ -*coloring* dari K_n^* . Misalkan bahwa $u_{i_1 j_1} v_{i_1}$ dan $v_{i_2} u_{i_2 j_2}$ adalah dua sisi dengan warna yang sama, maka lintasan $u_{i_1 j_1} - u_{i_2 j_2}$ di K_n^* bukanlah *rainbow path*. Ini menyebabkan kontradiksi, haruslah $rc(K_n^*) \geq \sum_{i=1}^n l_i$, selanjutnya diperoleh bahwa $rc(K_n^*) = \sum_{i=1}^n l_i$.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa c *rainbow coloring* adalah *strong rainbow coloring*. Karena $u_{i_1 j_1} v_{i_1} - v_{i_1} v_{i_2} - v_{i_2} u_{i_2 j_2}$ adalah lintasan dengan panjang $d(u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2})$ antara $u_{i_1 j_1}$ dan $u_{i_2 j_2}$ di K_n^* , dimana $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ dan $i_1 \neq i_2, j_1 \in \{1, \dots, l_{i_1}\}, j_2 \in \{1, \dots, l_{i_2}\}$, sehingga c *rainbow coloring* dapat membuat K_n^* *strongly rainbow connected*. Jadi diperoleh $src(K_n^*) \leq \sum_{i=1}^n l_i$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $src(K_n^*) \geq \sum_{i=1}^n l_i$. Misalkan tanpa mengurangi keumuman sehingga $src(K_n^*) = \sum_{i=1}^n l_i - 1$. Terdapat paling sedikit dua sisi *thorn* yang berwarna sama, maka *rainbow geodesic* dari satu *thorn* dengan yang lainnya tidak ada, sehingga ini kontradiksi. Oleh karena itu $src(K_n^*) = \sum_{i=1}^n l_i$.

Akibatnya, karena $rc(K_n^*) = \sum_{i=1}^n l_i$ dan $src(K_n^*) = \sum_{i=1}^n l_i$ maka $rc(K_n^*) = src(K_n^*) = \sum_{i=1}^n l_i$. $\square$

Berikut diberikan ilustrasi untuk graf *thorn* dari graf lengkap dengan $n = 4$, pada Gambar 3 terlihat bahwa $rc(K_4^*) = src(K_4^*) = 16$.

Gambar 3. $rc(K_4^*) = src(K_4^*) = 16$

Teorema berikut menyajikan bilangan *rainbow connection* untuk graf *thorn* dari graf lingkaran. Pada teorema berikut akan ditinjau graf *thorn* untuk setiap $l_i \geq n$ ($i \in \{1, \dots, n\}$).

Teorema 2.5. [7] Untuk $n \geq 4$ dan $l_i \geq n$, berlaku

$$rc(C_n^*) = src(C_n^*) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i.$$

Bukti. Perhatikan Gambar 4.

Untuk $n \geq 4$, perhatikan bahwa lingkaran C_n dengan n titik dan untuk setiap i dengan $1 \leq i \leq n$, misalkan $e_i = v_i v_{i+1}$. Misalkan c sebagai *sisi-coloring* dari C_n

 Gambar 4. Graf C_4^* .

sebagai berikut:

$$c(e_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ i - \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{untuk } \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Karena warna dari sisi *thorn* harus berbeda, maka berlaku bahwa $rc(C_n^*) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $rc(C_n^*) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i$, asumsikan berlawanan sehingga $rc(C_n^*) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i - 1$. Misalkan c^* adalah *rainbow* $(\lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i - 1)$ -coloring dari C_n^* . Asumsikan bahwa $c^*(e_i) = c(e_i)$ maka terdapat paling sedikit dua sisi *thorn* dengan warna yang sama. Sebaliknya, jika $c^*(v_i u_{ij}) = c(v_i u_{ij})$ maka $(\lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i - 1)$ -coloring dari C_n^* memberikan $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ warna yang berbeda sedangkan sisa n sisi dari C_n bukanlah sebuah *rainbow coloring*. Karena itu, nyatakan sebagai $rc(C_n^*) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $src(C_n^*) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i$. Karena $diam(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ dan pewarnaan dari sisi *thorn* haruslah berbeda, maka dapat disimpulkan bahwa $src(C_n^*) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $src(C_n^*) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i$. Asumsikan berlawanan sehingga $src(C_n^*) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i - 1$. Misalkan c^1 adalah *rainbow* $(\lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i - 1)$ -coloring dari C_n^* . Asumsikan bahwa $c^1(e_i) = c(e_i)$ maka terdapat paling sedikit dua sisi *thorn* dengan warna yang sama. Asumsikan bahwa $c^1(u_{ij}) = c(u_{mn})$ ($i \neq m \in \{1, 2, \dots, n\}$), maka tidak terdapat $u_{ij} v_i - v_m u_{mn}$ geodesic pada C_n^* . Similar untuk pembuktian dari bilangan *rainbow connection*, asumsikan bahwa $c^1(v_i u_{ij}) = c(v_i u_{ij})$ maka ini merupakan kontradiksi dari $src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Akibatnya, karena $rc(C_n^*) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i$ dan $src(C_n^*) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i$ maka $rc(C_n^*) = src(C_n^*) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + \sum_{i=1}^n l_i$. $\square$

Berikut diberikan ilustrasi untuk graf *thorn* dari graf lingkaran dengan $n = 4$, pada Gambar 5 terlihat bahwa $rc(C_4^*) = src(C_4^*) = 18$.

Teorema berikut menyajikan bilangan *rainbow connection* untuk graf *thorn* dari graf barbel. Pada teorema berikut akan ditinjau graf *thorn* untuk setiap $l_i \geq 2n$ ($i \in \{1, \dots, 2n\}$).

Gambar 5. Graf C_4^* .

Teorema 2.6. $\diamond$ Untuk $n \geq 2$ dan $l_i \geq 2n$, berlaku

$$rc(B_n^*) = src(B_n^*) = 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i.$$

Bukti. Perhatikan bahwa u_{ij} adalah *thorn* dari titik $v_i (i \in \{1, \dots, 2n\}, j \in \{1, \dots, l_i\})$. Perhatikan Gambar 6.

Gambar 6. Graf B_4^* .

Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $rc(B_n^*) \leq 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$. Karena semua *path* dari $u_{i_1 j_1}$ ke $u_{i_8 j_2}$ perlu melalui sisi $u_{i_1 j_1} v_{i_1}, v_{i_8} u_{i_8 j_2}$, ini jelas bahwa warna dari sisi $v_i u_{ij}$ dimana $(i \in \{1, \dots, 2n\}, j \in \{1, \dots, l_i\})$ haruslah berbeda. Dengan kata lain, ini merupakan syarat perlu untuk *rainbow connectivity* suatu graf. Oleh karena itu, dalam pewarnaan ini warnai semua sisi *thorn* $v_i u_{ij}$ dengan $c(v_i u_{ij}) = j^{(i)}$ dimana $j^{(i)}, i \in \{1, \dots, 2n\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$ terlebih dahulu sebagai kode pewarnaan dari sisi graf.

Warnai sisi lain dengan cara berikut:

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e \in (K_n^1), \\ 2, & \text{jika } e \in (K_n^2), \\ 3, & \text{jika } e \text{ adalah sebuah bridge} \end{cases}$$

Hal ini jelas bahwa lintasan dari $u_{i_1 j_1} v_{i_1} - v_{i_1} v_{i_4} - v_{i_4} v_{i_5} - v_{i_5} v_{i_8} - v_{i_8} u_{i_8 j_2}$ dengan pewarnaan $j_1^{(i_1)} - 1 - 3 - 2 - j_2^{(i_8)}$ sedangkan $u_{i_1 j_1} v_{i_1} - v_{i_1} v_{i_4} - v_{i_4} v_{i_5} - v_{i_5} v_{i_6} - v_{i_6} u_{i_6 j_8}$ dengan pewarnaan $j_1^{(i_1)} - 1 - 3 - 2 - j_8^{(i_6)}$. Semua lintasan dari graf memiliki warna

yang berbeda. Dengan kata lain, setiap dua titik dari graf B_n^* merupakan lintasan *rainbow connected* dengan $3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$ warna. Jadi, dapat dibangun sebuah *rainbow* $3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$ -coloring dari B_n^* sehingga dapat membuat graf B_n^* *rainbow connected*. Ini berarti bahwa $rc(B_n^*) \leq 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $rc(B_n^*) \geq 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$. Asumsikan berlawanan sehingga $rc(B_n^*) \leq 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i - 1$. Misalkan c^1 adalah *rainbow* $3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i - 1$ -coloring dari B_n^* . Misalkan bahwa $u_{i_1 j_1} v_{i_1}$ dan $v_{i_8} u_{i_8 j_2}$ adalah dua sisi dengan warna yang sama, maka lintasan $u_{i_1 j_1} - u_{i_8 j_2}$ di B_n^* bukanlah *rainbow path*. Ini menyebabkan kontradiksi, sehingga haruslah $rc(B_n^*) \geq 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$ selanjutnya diperoleh bahwa $rc(B_n^*) = 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa c *rainbow coloring* adalah *strong rainbow coloring*. Karena $u_{i_1 j_1} v_{i_1} - v_{i_1} v_{i_4} - v_{i_4} v_{i_5} - v_{i_5} v_{i_8} - v_{i_8} u_{i_8 j_2}$ adalah lintasan dengan panjang $d(u_{i_1 j_1}, u_{i_8 j_2})$ antara $u_{i_1 j_1}$ dan $u_{i_8 j_2}$ di B_n^* , dimana $i_1, i_4, i_5, i_8 \in \{1, \dots, 2n\}$ dan $i_1 \neq i_4 \neq i_5 \neq i_8, j_1 \in \{1, \dots, l_{i_1}\}, j_2 \in \{1, \dots, l_{i_8}\}$, sehingga c *rainbow coloring* dapat membuat B_n^* *strongly rainbow connected*. Dengan kata lain $src(B_n^*) \leq 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rc(B_n^*) \geq 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$. Misalkan tanpa mengurangi keumuman sehingga $src(B_n^*) = 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i - 1$. Terdapat paling sedikit dua sisi *thorn* yang berwarna sama, maka *rainbow geodesic* dari satu *thorn* dengan yang lainnya tidak ada, sehingga ini kontradiksi. Oleh karena itu $src(B_n^*) = 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$.

Akibatnya, karena $rc(B_n^*) = 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$ dan $src(B_n^*) = 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$ maka $rc(B_n^*) = src(B_n^*) = 3 + \sum_{i=1}^{2n} l_i$. $\square$

Berikut diberikan ilustrasi untuk graf *thorn* dari graf barbel dengan $n = 3$, pada Gambar 7 terlihat bahwa $rc(B_3^*) = src(B_3^*) = 39$.

Gambar 7. Graf B_3^* .

Teorema berikut menyajikan bilangan *rainbow connection* untuk graf *thorn* dari graf lolipop. Pada teorema berikut akan ditinjau graf *thorn* untuk setiap $l_i \geq n + m$ ($i \in \{1, \dots, (n + m)\}$)

Teorema 2.7. $\diamond$ Untuk $n \geq 1$, $m \geq 2$ dan $l_i \geq n + m$, berlaku

$$rc(L_{m,n}^*) = src(L_{m,n}^*) = (n + 1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$$

Bukti. Perhatikan bahwa u_{ij} adalah *thorn* dari titik v_i ($i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$) dan w_{ij} adalah *thorn* dari sisi x_i ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$). Perhatikan Gambar ??.

Gambar 8. Graf $L_{5,3}^*$.

Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_m$ adalah himpunan titik-titik dari graf lengkap K_m dan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah himpunan titik-titik dari graf lintasan P_n . Misalkan titik v_m dibuat berdekatan dengan x_1 pada graf $L_{m,n}^*$. Sedemikian sehingga ada tepat satu *path connecting* dari titik x_n dan v_m dengan panjang $(n - 1) + 1 = n$.

Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $rc(L_{m,n}^*) \leq (n + 1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$. Karena semua *path* dari $u_{i_1 j_1}$ ke $w_{i_3 j_2}$ perlu melalui sisi $u_{i_1 j_1} v_{i_1}, x_{i_3} w_{i_3 j_2}$, ini jelas bahwa warna dari sisi $v_i u_{ij}$ dimana ($i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$) dan sisi $x_i w_{ij}$ dimana ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$) haruslah berbeda. Dengan kata lain, ini merupakan syarat perlu untuk *rainbow connectivity* suatu graf. Oleh karena itu, dalam pewarnaan ini warnai semua sisi *thorn* $v_i u_{ij}$ dengan $c(v_i u_{ij}) = j^{(i)}$ dimana $j^{(i)}, i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$ dan sisi *thorn* $x_i w_{ij}$ dengan $c(x_i w_{ij}) = j^{(i)}$ dimana $j^{(i)}, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$ terlebih dahulu sebagai kode pewarnaan dari sisi graf.

Warnai sisi lain dengan cara berikut:

$$c(e) = \begin{cases} n - 1, & \text{untuk } e \in (P_n), \\ n + 1, & \text{untuk } e \in (K_m), \\ n, & \text{untuk } e \text{ adalah sebuah bridge} \end{cases}$$

Hal ini jelas bahwa lintasan dari $u_{i_1 j_1} v_{i_1} - v_{i_1} v_{i_5} - v_{i_5} x_{i_1} - x_{i_1} x_{i_2} - x_{i_2} x_{i_3} - x_{i_3} w_{i_3 j_2}$ dengan pewarnaan $j_1^{(i_1)} - 4 - 3 - 2 - 1 - j_2^{(i_3)}$ sedangkan $u_{i_2 j_1} v_{i_2} - v_{i_2} v_{i_5} - v_{i_5} x_{i_1} - x_{i_1} x_{i_2} - x_{i_2} x_{i_3} - x_{i_3} w_{i_3 j_3}$ dengan pewarnaan $j_1^{(i_2)} - 4 - 3 - 2 - 1 - j_3^{(i_3)}$. Semua lintasan dari graf memiliki warna yang berbeda. Dengan kata lain, setiap dua titik dari graf $L_{m,n}^*$ merupakan lintasan *rainbow connected* dengan $(n + 1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$

warna. Jadi, dapat dibangun sebuah *rainbow* $(n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$ -coloring dari $L_{m,n}^*$ sehingga dapat membuat graf $L_{m,n}^*$ *rainbow connected*. Ini berarti bahwa $rc(L_{m,n}^*) \leq (n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $rc(L_{m,n}^*) \geq (n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$. Asumsikan berlawanan sehingga $rc(L_{m,n}^*) \leq (n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i - 1$. Misalkan c^1 adalah *rainbow* $(n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i - 1$ -coloring dari $L_{m,n}^*$. Misalkan bahwa $u_{i_1 j_1} v_{i_1}$ dan $x_{i_3} w_{i_3 j_2}$ adalah dua sisi dengan warna yang sama, maka lintasan $u_{i_1 j_1} - w_{i_3 j_2}$ di $L_{m,n}^*$ bukanlah *rainbow path*. Ini menyebabkan kontradiksi, sehingga haruslah $rc(L_{m,n}^*) \geq (n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$, selanjutnya diperoleh bahwa $rc(L_{m,n}^*) = (n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa c *rainbow coloring* adalah *strong rainbow coloring*. Karena $u_{i_1 j_1} v_{i_1} - v_{i_1} v_{i_5} - v_{i_5} x_{i_1} - x_{i_1} x_{i_2} - x_{i_2} x_{i_3} - x_{i_3} w_{i_3 j_2}$ adalah lintasan dengan panjang $d(u_{i_1 j_1}, w_{i_3 j_2})$ antara $u_{i_1 j_1}$ dan $w_{i_3 j_2}$ di $L_{m,n}^*$, dimana $i_1, i_5 \in \{1, \dots, m\}$ dan $i_1 \neq i_5$, $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n\}$ dan $i_1 \neq i_2 \neq i_3$, $j_1 \in \{1, \dots, l_{i_1}\}$, $j_2 \in \{1, \dots, l_{i_3}\}$, sehingga c *rainbow coloring* dapat membuat $L_{m,n}^*$ *strongly rainbow connected*. Dengan kata lain $src(L_{m,n}^*) \leq (n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $src(L_{m,n}^*) \geq (n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$. Misalkan tanpa mengurangi keumuman sehingga $src(L_{m,n}^*) = (n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i - 1$. Terdapat paling sedikit dua sisi *thorn* yang berwarna sama, maka *rainbow geodesic* dari satu *thorn* dengan yang lainnya tidak ada, sehingga ini kontradiksi. Oleh karena itu $src(L_{m,n}^*) = (n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$.

Akibatnya, karena $rc(L_{m,n}^*) = (n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$ dan $src(L_{m,n}^*) = (n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$ maka $rc(L_{m,n}^*) = src(L_{m,n}^*) = (n+1) + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$. $\square$

Berikut diberikan ilustrasi untuk graf *thorn* dari graf lolipop dengan $m=3, n=2$, pada Gambar 9 terlihat bahwa $rc(L_{3,2}^*) = src(L_{3,2}^*) = 28$.

Gambar 9. Graf $L_{3,2}^*$

Teorema berikut menyajikan bilangan *rainbow connection* untuk graf *thorn* dari graf *tadpole*. Pada teorema berikut akan ditinjau graf *thorn* untuk setiap $l_i \geq n+m$ ($i \in \{1, \dots, (n+m)\}$).

Teorema 2.8. $\diamond$ Untuk $n \geq 1$, $m \geq 3$ dan $l_i \geq n + m$, berlaku

$$rc(T_{m,n}^*) = src(T_{m,n}^*) = \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$$

Bukti. Perhatikan bahwa u_{ij} adalah *thorn* dari titik v_i ($i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$) dan w_{ij} adalah *thorn* dari sisi x_i ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$). Perhatikan Gambar 10.

Gambar 10. Graf $T_{6,3}^*$.

Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_m$ adalah himpunan titik-titik dari graf lingkaran C_m dan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah himpunan titik-titik dari graf lintasan P_n . Misalkan titik v_m dibuat berdekatan dengan x_1 pada graf $T_{m,n}^*$. Maka $x_1 - x_2 - \dots - x_n - v_m$ adalah *path* dengan panjang n pada graf $T_{m,n}^*$. Sedemikian sehingga ada tepat satu *path* antara v_m dan x_1 .

Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $rc(T_{m,n}^*) \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$. Karena semua *path* dari $u_{i_3 j_1}$ ke $w_{i_3 j_2}$ perlu melalui sisi $u_{i_3 j_1} v_{i_3}, x_{i_3} w_{i_3 j_2}$, ini jelas bahwa warna dari sisi $v_i u_{ij}$ dimana ($i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$) dan sisi $x_i w_{ij}$ dimana ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$) haruslah berbeda. Dengan kata lain, ini merupakan syarat perlu untuk *rainbow connectivity* suatu graf. Oleh karena itu, dalam pewarnaan ini warnai semua sisi *thorn* $v_i u_{ij}$ dengan $c(v_i u_{ij}) = j^{(i)}$ dimana $j^{(i)}, i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$ dan sisi *thorn* $x_i w_{ij}$ dengan $c(x_i w_{ij}) = j^{(i)}$ dimana $j^{(i)}, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, l_i\}$ terlebih dahulu sebagai kode pewarnaan dari sisi graf.

Warnai sisi lain dengan cara berikut:

$$c(e) = \begin{cases} n-1, & \text{untuk } e \in (P_n), \\ n, & \text{untuk } e \text{ adalah sebuah bridge} \end{cases}$$

Warnai *path* $v_m - v_1 - v_2 - \dots - v_{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$ dengan pewarnaan $n+1, n+2, \dots, n + \lceil \frac{m}{2} \rceil$ dan warnai sisi *path* $v_m - v_{m-1} - v_{m-2} - \dots - v_{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$ dengan pewarnaan $n + \lceil \frac{m}{2} \rceil, n + \lceil \frac{m}{2} \rceil - 1, \dots, n+2, n+1$

Hal ini jelas bahwa lintasan dari $u_{i_3j_1}v_{i_3} - v_{i_3}v_{i_2} - v_{i_2}v_{i_1} - v_{i_1}v_{i_6} - v_{i_6}x_{i_1} - x_{i_1}x_{i_2} - x_{i_2}x_{i_3} - x_{i_3}w_{i_3j_2}$ dengan pewarnaan $j_1^{(i_3)} - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 - j_2^{(i_3)}$ sedangkan $u_{i_3j_2}v_{i_3} - v_{i_3}v_{i_4} - v_{i_4}v_{i_5} - v_{i_5}v_{i_6} - v_{i_6}x_{i_1} - x_{i_1}x_{i_2} - x_{i_2}x_{i_3} - x_{i_3}w_{i_3j_1}$ dengan pewarnaan $j_2^{(i_3)} - 4 - 5 - 6 - 3 - 2 - 1 - j_1^{(i_3)}$. Semua lintasan dari graf memiliki warna yang berbeda. Dengan kata lain, setiap dua titik dari graf $T_{m,n}^*$ merupakan lintasan *rainbow connected* dengan $\lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$ warna. Jadi, dapat dibangun sebuah *rainbow* $\lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$ -coloring dari $T_{m,n}^*$ sehingga dapat membuat graf $T_{m,n}^*$ *rainbow connected*. Ini berarti bahwa $rc(T_{m,n}^*) \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $rc(T_{m,n}^*) \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$. Asumsikan berlawanan sehingga $rc(T_{m,n}^*) \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i - 1$. Misalkan c^1 adalah *rainbow* $\lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i - 1$ -coloring dari $T_{m,n}^*$. Misalkan bahwa $u_{i_3j_1}v_{i_3}$ dan $x_{i_3}w_{i_3j_2}$ adalah dua sisi dengan warna yang sama, maka lintasan $u_{i_3j_1} - w_{i_3j_2}$ di $T_{m,n}^*$ bukanlah *rainbow path*. Ini menyebabkan kontradiksi, sehingga haruslah $rc(T_{m,n}^*) \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$, selanjutnya diperoleh bahwa $rc(T_{m,n}^*) = \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa c *rainbow coloring* adalah *strong rainbow coloring*. Karena $u_{i_3j_1}v_{i_3} - v_{i_3}v_{i_2} - v_{i_2}v_{i_1} - v_{i_1}v_{i_6} - v_{i_6}x_{i_1} - x_{i_1}x_{i_2} - x_{i_2}x_{i_3} - x_{i_3}w_{i_3j_2}$ adalah lintasan dengan panjang $d(u_{i_3j_1}, w_{i_3j_2})$ antara $u_{i_3j_1}$ dan $w_{i_3j_2}$ di $T_{m,n}^*$, dimana $i_1, i_2, i_3, i_6 \in \{1, \dots, m\}$ dan $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_6$, $i_1, i_2, i_4 \in \{1, \dots, n\}$ dan $i_1 \neq i_2 \neq i_3$, $j_1 \in \{1, \dots, l_{i_3}\}$, $j_2 \in \{1, \dots, l_{i_3}\}$, sehingga c *rainbow coloring* dapat membuat $T_{m,n}^*$ *strongly rainbow connected*. Dengan kata lain $src(T_{m,n}^*) \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $src(T_{m,n}^*) > \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$. Misalkan tanpa mengurangi keumuman sehingga $src(T_{m,n}^*) = \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i - 1$. Terdapat paling sedikit dua sisi *thorn* yang berwarna sama, maka *rainbow geodesic* dari satu *thorn* dengan yang lainnya tidak ada, sehingga ini kontradiksi. Oleh karena itu $src(T_{m,n}^*) = \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$.

Akibatnya, karena $rc(T_{m,n}^*) = \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$ dan $src(T_{m,n}^*) = \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$ maka $rc(T_{m,n}^*) = src(T_{m,n}^*) = \lceil \frac{m}{2} \rceil + n + \sum_{i=1}^{n+m} l_i$. $\square$

Berikut diberikan ilustrasi untuk graf *thorn* dari graf *tadpole* dengan $m = 3, n = 2$, pada Gambar 11 terlihat bahwa $rc(T_{3,2}^*) = src(T_{3,2}^*) = 28$.

 Gambar 11. Graf $T_{3,2}^*$.

3. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah diperoleh bilangan *rainbow connection* untuk graf *thorn* dari graf lengkap dan graf lingkaran. Selanjutnya diperoleh bilangan *rainbow connection* untuk graf *thorn* dari graf barbel, graf lolipop, dan graf *tadpole*.

4. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy, Bapak Dr. Muhafzan yang telah memberikan masukan dan saran, sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Dr. Jenizon sehingga paper ini dapat dipublikasikan.

Daftar Pustaka

- [1] Bondy, J.A. dan U.S.R. Murty. 2008. *Graph Theory*. Graduated Texts In Mathematics. Springer. New York.
- [2] Chartrand, G. dan P. Zhang, 2005. *Introduction to Graph Theory*, McGraw-Hill International Editions, Singapore.
- [3] Chartrand, G. dkk, 2008. Rainbow Connection in Graphs, *Math. Bohem.* **133**: 85 – 98.
- [4] Diestel, R. 2005. *Graph Theory*. Electronic Edition 3. New York.
- [5] Ericksen, A. 2007. *Graduating Engineer & Computer Careers*. A Matter of security, 24-28.
- [6] Li, X. dan Y. Sun. 2012. *Rainbow Connections of Graphs*. Springer Briefs in Mathematics. Springer. New York.
- [7] Liu, Y. dan Z. Wang. 2014. Rainbow Connection Number of the Thorn Graphs. *Applied Mathematical Sciences* **8**: 6373 – 6377.