Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **3** Hal. 77 – 84
ISSN : 2303–291X

METODE BENTUK NORMAL PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN RAYLEIGH

EKA ASIH KURNIATI, MAHDHIVAN SYAFWAN, RADHIATUL HUSNA
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : Ekurnia50@gmail.com

Abstrak. Pada paper ini dibahas metode bentuk normal pada persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua dan secara khusus diterapkan pada penyelesaian persamaan Rayleigh. Pada metode bentuk normal ini, suatu transformasi koordinat dikonstruksi secara sistematis untuk mendapatkan bentuk normal dari persamaan diferensial. Dengan menggunakan metode bentuk normal diperoleh solusi analitik dari persamaan Rayleigh yang kemudian dibandingkan dengan solusi numeriknya. Hasil perbandingan antara solusi analitik dan numerik menunjukkan kesesuaian yang cukup baik.

Kata Kunci: Metode bentuk normal, Persamaan Rayleigh, Transformasi Koordinat

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial merupakan persamaan matematika yang memuat suatu fungsi dan turunannya. Suatu persamaan diferensial dikatakan *linier* jika variabel tak-bebas dan turunannya muncul dalam bentuk *linier*. Jika tidak demikian, maka persamaan diferensial tersebut dikatakan *nonlinier*. Turunan tertinggi yang muncul pada persamaan diferensial disebut orde dari persamaan diferensial tersebut.

Suatu persamaan diferensial linier dan nonlinier dapat diselesaikan menjadi bentuk yang paling sederhana sedemikian sehingga solusinya dapat ditentukan dengan mudah. Persamaan dengan bentuk yang paling sederhana ini dinamakan bentuk normal (*normal form*) dari persamaan diferensial tersebut, sedangkan metode yang digunakan untuk menyederhanakan persamaan tersebut dinamakan metode bentuk normal [4]. Pada metode bentuk normal ini, suatu transformasi koordinat dikonstruksi secara sistematis untuk mendapatkan bentuk normal dari persamaan diferensial.

Dalam paper ini akan dibahas penurunan metode bentuk normal pada persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua dan secara khusus diterapkan pada persamaan Rayleigh yang diberikan oleh [4].

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \epsilon(\dot{u} - \frac{1}{3}\dot{u}^3), \tag{1.1}$$

dimana $u(t)$ merepresentasikan penyimpangan getaran benda pada waktu t, ω menyatakan frekuensi alami dari getaran benda, dan ϵ merupakan konstanta redaman yang bernilai kecil (disebut parameter perturbasi). Persamaan Rayleigh merupakan persamaan diferensial nonlinier orde dua yang memodelkan gerakan osilator dengan faktor redaman nonlinier. Aplikasinya banyak ditemukan dalam bidang fisika dan elektromekanik. Persamaan Rayleigh diperkenalkan oleh fisikawan Inggris yang bernama Lord Rayleigh pada tahun 1917 [2]. Persamaan tersebut memiliki solusi periodik, yaitu solusi yang merepresentasikan suatu fenomena yang terjadi secara berulang. Pembahasan pada makalah ini mengeksplorasi kembali kajian pada referensi [4] dengan menambahkan pembahasan tentang perbandingan solusinya secara numerik.

2. Konstruksi Awal Metode Bentuk Normal

Dalam makalah ini akan dijelaskan konstruksi awal dari metode bentuk normal pada persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua berikut.

$$\ddot{u} + \omega^2 u = f(u, \dot{u}), \tag{2.1}$$

dimana $f(u, \dot{u})$ dapat dijabarkan dalam bentuk deret pangkat terhadap u dan $\dot{u}$.

Persamaan (2.1) dapat diubah ke dalam sistem persamaan diferensial orde satu dengan memisalkan

$$x_1 = u \text{ dan } x_2 = \dot{u}, \tag{2.2}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= f(x_1, \dot{x_2}) - \omega^2 x_1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ide utama dari metode bentuk normal adalah dengan memperkenalkan transformasi *near-identity*

$$x_1 = y_1 + h_1(y_1, y_2), \tag{2.4}$$

$$x_2 = y_2 + h_2(y_1, y_2), \tag{2.5}$$

dimana $h_1 \approx 0$ dan $h_2 \approx 0$, kemudian substitusikan ke sistem (2.3) sehingga diperoleh persamaan dengan bentuk yang sesederhana mungkin (disebut bentuk normal).

Persamaan (2.4) dan (2.5) disebut transformasi *near-identity*, karena $x_1(t) - y_1(t)$ dan $x_2(t) - y_2(t)$ bernilai kecil. Dengan menggunakan aturan rantai, turunan persamaan (2.4) dan (2.5) terhadap t menghasilkan

$$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 + \frac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_1}\dot{y}_1 + \frac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_2}\dot{y}_2, \tag{2.6}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{y}_2 + \frac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_1}\dot{y}_1 + \frac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_2}\dot{y}_2. \tag{2.7}$$

Ssolusi dari persamaan (2.1) ketika $f \neq 0$ ditulis sebagai

$$u = Be^{i\omega t} + \bar{B}e^{-i\omega t}, \tag{2.8}$$

dimana B adalah suatu konstanta kompleks dan $\bar{B}$ adalah kompleks konjugat dari B. Dari persamaan (2.8), diperoleh

$$\dot{u} = i\omega(Be^{iwt} - \bar{B}e^{-iwt}). \tag{2.9}$$

Kemudian dengan memisalkan $\xi(t) = Be^{i\omega t}$, maka persamaan (2.8) dan (2.9) menjadi

$$u = \xi(t) + \bar{\xi}(t), \tag{2.10}$$

$$\dot{u} = i\omega[\xi(t) - \bar{\xi}(t)]. \tag{2.11}$$

Penyelesaian dari persamaan (2.10) dan (2.11) untuk ξ dan $\overline{\xi}$ adalah

$$\xi = \frac{1}{2}\left(u - \frac{i}{\omega}\dot{u}\right), \tag{2.12}$$

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2}\left(u + \frac{i\dot{u}}{\omega}\right). \tag{2.13}$$

Selanjutnya, turunan pertama dari persamaan (2.12) dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2}\left(\dot{u} - \frac{i}{\omega}\ddot{u}\right).$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.1) ke turunan dari persamaan (2.12), diperoleh

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2}i\omega\left(u - \frac{i}{\omega}\dot{u}\right) - \frac{i}{2\omega}f(u, \dot{u}). \tag{2.14}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.10) dan (2.11), maka persamaan (2.14) menjadi

$$\dot{\xi} = i\omega\xi - \frac{i}{2\omega}f[\xi + \bar{\xi}, i\omega(\xi - \bar{\xi})]. \tag{2.15}$$

Untuk selanjutnya akan ditinjau secara khusus persamaan Rayleigh, yaitu untuk $f = \epsilon(\dot{u} - \frac{1}{3}\dot{u}^3)$.

3. Penyelesaian Persamaan Rayleigh dengan Metode Bentuk Normal

Pandang kembali persamaan Rayleigh

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \epsilon\left(\dot{u} - \frac{1}{3}\dot{u}^3\right), \tag{3.1}$$

dimana ϵ suatu parameter positif yang bernilai kecil. Dari persamaan tersebut, fungsi *perturbed*nya adalah

$$f = \epsilon(\dot{u} - \frac{1}{3}\dot{u}^3), \tag{3.2}$$

dengan menggunakan persamaan (2.15), diperoleh :

$$\dot{\xi} = i\omega\xi + \frac{1}{2}\epsilon\left(\xi - \bar{\xi} + \frac{1}{3}\omega^2(\xi - \bar{\xi})^3\right). \tag{3.3}$$

Selanjutnya kenakan transformasi *near-identity* dari ξ ke η yang berbentuk

$$\xi = \eta + h(\eta, \bar{\eta}), \tag{3.4}$$

sehingga

$$\dot{\xi} = \dot{\eta} + \frac{\partial h}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial h}{\partial \bar{\eta}}\dot{\bar{\eta}}, \tag{3.5}$$

dimana $h \approx 0$ dan dengan menggunakan persamaan (3.4) dan (3.5), persamaan (3.3) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\dot{\eta} = i\omega\eta + i\omega h - \frac{\partial h}{\partial \eta}\dot{\eta} - \frac{\partial h}{\partial \bar{\eta}}\dot{\bar{\eta}} + \frac{1}{2}\epsilon[\eta - \bar{\eta} \\ +h - \bar{h} + \frac{1}{3}\omega^2(\eta - \bar{\eta} + h - \bar{h})^3].\end{aligned} \tag{3.6}$$

Karena suku perturbasi dari persamaan (3.6) bertipe linier dan kubik, maka h dapat dinyatakan sebagai

$$h = \epsilon(\Lambda_1\eta + \Lambda_2\bar{\eta} + \Lambda_1\eta^3 + \Lambda_2\eta^2\bar{\eta} + \Lambda_3\eta\bar{\eta}^2 + \Lambda_4\bar{\eta}^3) + O(\mid \eta^4 \mid), \tag{3.7}$$

lalu Λ_i dipilih sehingga persamaan (3.6) menjadi bentuk normal.

Sebagai langkah pertama, eliminasi $\dot{\eta}$ dan $\dot{\bar{\eta}}$ pada ruas kanan persamaan (3.6). Hal ini dapat dilakukan dengan iterasi. Untuk aproksimasi pertama dapat dipilih

$$\dot{\eta} = i\omega\eta, \tag{3.8}$$

sehingga konjugatnya menjadi

$$\dot{\bar{\eta}} = -i\omega\bar{\eta}. \tag{3.9}$$

Kemudian persamaan (3.7), (3.8) dan (3.9) disubstitusikan ke ruas kanan persamaan (3.6) dan kelompokkan suku-sukunya berdasarkan pangkat η dan $\bar{\eta}$, diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{\eta} = i\omega\eta + 2i\epsilon\omega(\Lambda_2 + \frac{i}{4\omega})\bar{\eta} + \frac{1}{2}\epsilon\eta - i\epsilon\omega(2\Lambda_1 + \frac{1}{6}i\omega)\eta^3 \\ -\frac{1}{2}\epsilon\omega^2\eta^2\bar{\eta} + i\epsilon\omega(2\Lambda_3 - \frac{1}{2}i\omega)\eta\bar{\eta}^2 + i\epsilon\omega(4\Lambda_4 + \frac{1}{6}i\omega)\bar{\eta}^3 + \cdots .\end{aligned} \tag{3.10}$$

Persamaan (3.10) tidak memuat Λ_1 dan Λ_2, maka suku yang melibatkan $\epsilon\eta$ dan $\epsilon\eta^2\bar{\eta}$ tidak dapat dieliminasi. Suku-suku ini disebut suku resonansi dan oleh sebab itu tidak dapat dieliminasi dari persamaan (3.10). Kemudian pilih Λ_2, Λ_1, Λ_3, dan Λ_4 untuk mengeliminasi suku-suku yang melibatkan $\bar{\eta}$, η^3, $\eta\bar{\eta}^2$, dan $\bar{\eta}^3$, yaitu

$$\Lambda_2 = -\frac{i}{4\omega}, \quad \Lambda_1 = -\frac{1}{12}i\omega, \quad \Lambda_3 = \frac{1}{4}i\omega, \quad \Lambda_4 = -\frac{1}{24}i\omega. \tag{3.11}$$

Akibatnya, pada aproksimasi kedua, bentuk yang paling sederhana untuk $\dot{\eta}$ adalah

$$\dot{\eta} = i\omega\eta + \frac{1}{2}\epsilon\eta - \frac{1}{2}\epsilon\omega^2\eta^2\bar{\eta}. \tag{3.12}$$

Substitusikan persamaan (3.4)-(3.7) ke (2.10)-(2.11) kemudian gunakan (3.11), maka diperoleh

$$\begin{aligned}u = \eta + \bar{\eta} + \frac{i}{4\omega}\epsilon(\eta - \bar{\eta}) - \frac{1}{24}\epsilon i\omega(\eta^3 - \bar{\eta}^3) + \\ \frac{1}{4}i\omega\epsilon(\eta\bar{\eta}^2 - \bar{\eta}\eta^2) + \cdots ,\end{aligned} \tag{3.13}$$

dimana η diberikan oleh persamaan (3.12). Misalkan solusi untuk η diberikan oleh

$$\eta = A(t)e^{i\omega t}, \quad \dot{\eta} = \dot{A}e^{i\omega t} + Ai\omega e^{i\omega t}, \tag{3.14}$$

dimana ω merupakan frekuensi alami dari sistem dan A merupakan fungsi kompleks terhadap waktu t. Substitusikan persamaan (3.14) ke persamaan (3.12), maka diperoleh

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\epsilon A - \frac{1}{2}\omega^2\epsilon A^2\bar{A}. \tag{3.15}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (3.14) ke persamaan (3.13), didapatkan

$$\begin{aligned} u = {} & Ae^{i\omega t} + \bar{A}e^{-i\omega t} + \frac{i}{4\omega}\epsilon(Ae^{i\omega t} - \bar{A}e^{-i\omega t}) - \frac{i}{24}\epsilon\omega(A^3e^{3i\omega t} - \bar{A}^3e^{-3i\omega t}) - \\ & \frac{i}{4}\epsilon\omega(A^2\bar{A}e^{i\omega t} - \bar{A}^2Ae^{-i\omega t}) + \cdots . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Karena A fungsi kompleks, nyatakan A dalam bentuk polar

$$A = ae^{i\beta}, \tag{3.17}$$

sehingga

$$\dot{A} = \dot{a}e^{i\beta} + ae^{i\beta}\dot{\beta}i, \tag{3.18}$$

dimana a dan β adalah fungsi terhadap t. Dengan demikian persamaan (3.16) menjadi

$$\begin{aligned} u = {} & a(2\cos(\beta + \omega t)) - \left(\frac{1}{4\omega}\epsilon a - \frac{1}{4}\epsilon\omega a^3\right)2\sin(\beta + \omega t) \\ & + \frac{1}{24}\epsilon\omega a^3 2\sin(3\beta + 3\omega t) + \cdots . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Substitusikan persamaan (3.17) dan (3.18) ke dalam persamaan (3.15), maka berlaku

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{2}\epsilon A - \frac{1}{2}\omega^2\epsilon A^2\bar{A} \\ \Leftrightarrow \dot{a} + ia\dot{\beta} &= \frac{1}{2}a\epsilon - \frac{1}{2}a^3\omega^2\epsilon. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Kemudian pisahkan bagian riil dan imajiner pada persamaaan (3.20), maka didapatkan

$$\dot{a} = \frac{1}{2}a\epsilon - \frac{1}{2}a^3\omega^2\epsilon, \tag{3.21}$$

$$\dot{\beta} = 0. \tag{3.22}$$

Solusi untuk persamaan (3.22) diberikan oleh $\beta = C_1$, dimana C_1 suatu konstanta.

Selanjutnya perhatikan bahwa persamaan (3.21) merupakan persamaan diferensial nonliner. Namun, dengan menggunakan transformasi $a = 1/\sqrt{v}$, persamaan (3.21) dapat diubah menjadi persamaan diferensial linier berikut:

$$\dot{v} + \epsilon v = \omega^2\epsilon.$$

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan di atas dengan faktor integrasi $e^{\int \epsilon dt}$, diperoleh nilai v berikut.

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\epsilon t}\left(\int \omega^2 \epsilon e^{\epsilon t} dt\right) \\ &= \omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t}. \end{aligned}$$

Dengan demikian solusi dari persamaan (3.21) - (3.22) diberikan oleh

$$\begin{aligned} \beta &= C_1, \\ a &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t}}}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

dimana C_1 dan C_2 suatu konstanta riil sebarang.

Ganti nilai a dan β pada persamaan (3.19) dengan (3.23), maka diperoleh

$$\begin{aligned} u = {} & \frac{2\cos(C_1 + \omega t)}{\sqrt{\omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t}}} - \left(\frac{0.25\epsilon}{\sqrt{\omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t}}\omega} - \frac{\epsilon\omega}{4(\omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t})^{\frac{3}{2}}}\right) 2\sin(C_1 + \omega t) \\ & + \left(\frac{\epsilon\omega \sin(3C_1 + 3\omega t)}{12(\omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t})^{\frac{3}{2}}}\right) + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{3.24}$$

yang merupakan solusi umum dari persamaan Rayleigh (3.1).

4. Perbandingan dengan Solusi Numerik

Solusi dari persamaan Rayleigh yang diperoleh dari metode bentuk normal, yang diberikan oleh persamaan (3.24) akan dibandingkan dengan solusi numeriknya. Karena solusi (3.24) muncul dalam bentuk deret, maka solusi numerik akan dibandingkan dengan tiga suku pertama dari solusi (3.24), yaitu

$$\begin{aligned} u = {} & \frac{2\cos(C_1 + \omega t)}{\sqrt{\omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t}}} - \left(\frac{0.25\epsilon}{\sqrt{\omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t}}\omega} - \frac{\epsilon\omega}{4(\omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t})^{\frac{3}{2}}}\right) 2\sin(C_1 + \omega t) + \\ & \left(\frac{\epsilon\omega \sin(3C_1 + 3\omega t)}{12(\omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t})^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Untuk penyelesaian numerik, persamaan Rayleigh (3.1) terlebih dahulu diubah menjadi persamaan diferensial orde 1 dengan memisalkan $\dot{u} = p$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{u} &= p, \\ \dot{p} &= \epsilon\left(\dot{u} - \frac{1}{3}\dot{u}^3\right) - \omega^2 u. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sebagai ilustrasi, gunakan nilai-nilai berikut.

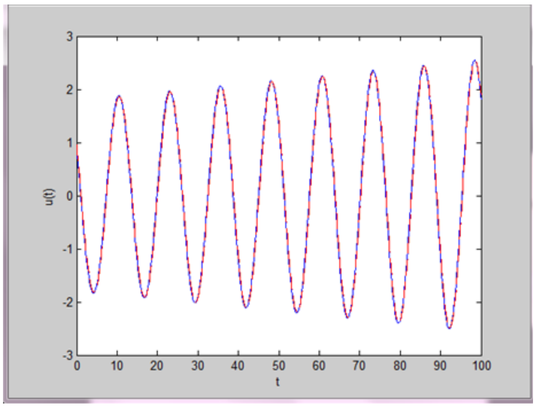
$$\epsilon = 0.01, \quad \omega = 0.5, \quad C_1 = C_2 = 1, \tag{4.3}$$

sehingga pada saat $t = 0$ diperoleh

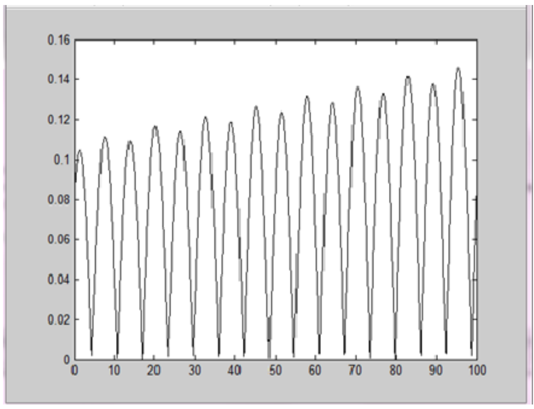
$$u(0) = 0.9605431452, \quad \dot{u}(0) = -0.7511557602, \tag{4.4}$$

yang dapat digunakan sebagai syarat awal dari sistem (3.1).

Selanjutnya sistem (3.1) dengan syarat awal (4.4) diimplementasikan ke rumus iterasi Runge-Kutta orde 4 dengan ukuran langkah $h = 0.1$. Hasil solusi numerik dan perbandingannya dengan hampiran solusi analitik (4.1) diberikan oleh Gambar 1 (dilakukan dengan Matlab). Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa hampiran solusi analitik dan solusi numerik untuk nilai-nilai (4.3) menunjukkan kesesuaian yang sangat baik.



Gambar 1. Perbandingan solusi numerik (biru) dan hampiran solusi analitik (merah) yang diperoleh dari metode bentuk normal [persamaan (3.24)] untuk $\epsilon = 0.01, \omega = 0.5, C_1 = C_2 = 1$



Gambar 2. Galat dari perbandingan solusi numerik dan solusi analitik yang diperoleh dari metode bentuk normal persamaan (3.24) untuk $\epsilon = 0.01, \omega = 0.5, C_1 = C_2 = 1$

5. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah dijelaskan konstruksi metode bentuk normal pada persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua dan secara khusus diterapkan pada penyelesaian persamaan Rayleigh

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \epsilon(\dot{u} - \frac{1}{3}\dot{u}^3),$$

dimana ϵ bernilai kecil. Dengan menggunakan metode bentuk normal, diperoleh solusi umum dari persamaan Rayleigh yang diberikan oleh

$$u = \frac{2\cos(C_1 + \omega t)}{\sqrt{\omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t}}} - \left(\frac{0.25\epsilon}{\sqrt{\omega^2 + C_2 e^{\epsilon t}\omega}} - \frac{\epsilon\omega}{4(\omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t})^{\frac{3}{2}}} \right) 2\sin(C_1 + \omega t) + \left(\frac{\epsilon\omega \sin(3C_1 + 3\omega t)}{12(\omega^2 + C_2 e^{-\epsilon t})^{\frac{3}{2}}} \right) + \cdots, \tag{5.1}$$

dengan C_1 dan C_2 suatu konstanta sebarang.

Solusi analitik di atas kemudian dibandingkan dengan solusi numerik yang diperoleh dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Hasil perbandingan antara solusi analitik dan numerik menunjukkan kesesuaian yang sangat baik. Untuk nilai-nilai yang telah ditentukan berikut $\epsilon = 0.01, \omega = 0.5, C = 1$, diperoleh galat dalam orde 15×10^{-2}.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Narwen, M.Si, dan Dr. Admi Nazra yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Boyce, William E and Richard C. Diprima. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value problems.* Jhon Wiley and Sons: New York.
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Cavitation Modelling (Rayleigh), [diakses 4 Februari 2016]
[3] Iserles, A..(2009). A *First Course in the Numerical Analysis of Differential Equation.* Cambridge University Press: Cambridge.
[4] Nayfeh, A. H. (2011) . *The Method of Normal Form.* Wiley-VCH, Weinheim.
[5] D. G. Luenberger. 1979. *Introduction to Dynamic Systems.* New York: John Wiley and Sons Inc.
[6] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer* Edisi Kedelapan-Jilid 1. Jakarta: Erlangga.